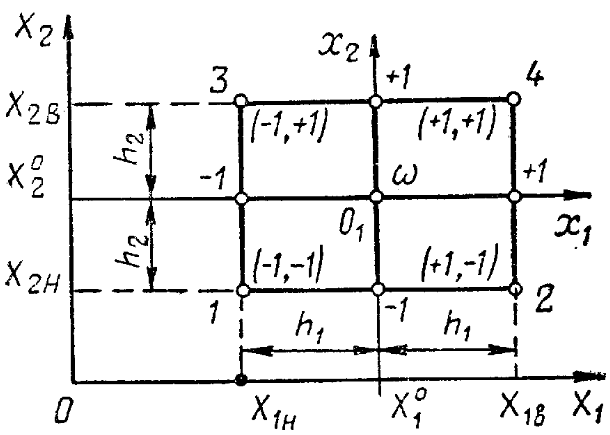
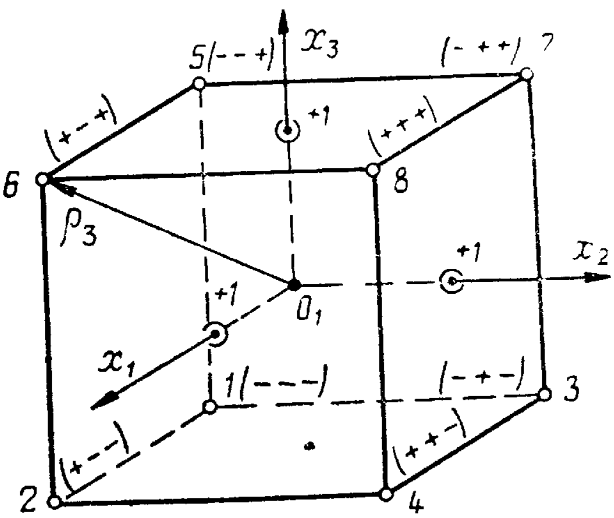
Н.И.Ткаченко

ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Учебное пособие





пос. Персиановский 2015

Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Департамент научно-технологической политики и образования
ФГБОУ ВПО Донской государственный аграрный университет

ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Учебное пособие

Для бакалавров, обучающихся по направлению подготовки 280700.62 - «Техносферная безопасность», профиль «Безопасность технологических процессов и производств»

пос. Персиановский 2015

УДК 167/168 (075.8)
ББК 72в
Т-48

Автор: кандидат технических наук, доцент Ткаченко Н.И

Ткаченко Н.И.
Т48 Основы научных исследований: учебное пособие/ Н.И.Ткаченко. - пос. Персиановский: Дон ГАУ, 2015. - 55 с.

Рассмотрены вопросы статистической обработки результатов эксперимента - определение характеристик эмпирических распределений, исключение грубых погрешностей наблюдений, проверка закона распределения опытных данных, основы регрессионного и корреляционного анализа, применение методов планирования эксперимента .

Учебное пособие предназначено для бакалавров, обучающихся по направлению подготовки 280700.62 -«Техносферная безопасность», профиль «Безопасность технологических процессов и производств»

УДК 167/168 (075.8)
ББК 72в

Рис. – 4
Табл. – 25
Библ. – 6

Рецензент: Башняк С.Е., заведующий кафедрой «Безопасность жизнедеятельности, механизация и автоматизация технологических процессов и производств» ДонГАУ, канд. техн. наук, доцент
Михеев А.В., канд. техн. наук, профессор кафедры «Машины природообустройства» НИМИ ДГАУ.

Одобрено методической комиссией факультета ТСХП
Протокол № 9 от 24 апреля 2015 года.

Рекомендовано методическим Советом ДонГАУ в качестве учебного пособия
Протокол № 6 от 28 мая 2015 года.

ВВЕДЕНИЕ

Согласно учебного плана подготовки бакалавров по направлению 280700.62_«Техносферная безопасность» (профиль: «Безопасность технологических процессов и производств») дисциплина Б2.В.ДВ.2.1 «Основы научных исследований», относится к вариативной части математического и естественнонаучного цикла.

Цель преподавания дисциплины: подготовка специалистов, способных вести научно-исследовательские работы по совершенствованию безопасности технологических процессов и производств, владеющих экспериментальными методами исследования опасных и вредных производственных факторов.

Задачи изучения дисциплины – обучить студентов:

- основным методам научного исследования;
- методам планирования эксперимента и обработки экспериментальных данных при проведении лабораторных и производственных экспериментов;
- порядку ведения документации и отчетности при выполнении научно-исследовательских работ;
- основам патентоведения и методологии научно-технического творчества

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих *общекультурных* компетенций:

ОК-7 - владения культурой безопасности и риск-ориентированным мышлением, при котором вопросы безопасности и сохранения окружающей среды рассматриваются в качестве важнейших приоритетов в жизни и деятельности;

ОК-8 - способности работать самостоятельно;

ОК-9 - способности принимать решения в пределах своих полномочий;

ОК-11 - способности использовать законы и методы математики, естественных, гуманитарных и экономических наук при решении профессиональных задач (ОК-11);

ОК-13 - способности использования основных программных средств, умением пользоваться глобальными информационными ресурсами, владение современными средствами телекоммуникаций, способностью использовать навыки работы с информацией из различных источников для решения профессиональных и социальных задач

Изучение дисциплины направлено на формирование *профессиональных* компетенций:

ПК-1 - способности ориентироваться в перспективах развития техники и технологии защиты человека и природной среды от опасностей техногенного и природного характера;

ПК-2 - способности разрабатывать и использовать графическую документацию;

ПК-3 - способности принимать участие в инженерных разработках среднего уровня сложности в составе коллектива;

ПК-4 - способности оценивать риск и определять меры по обеспечению безопасности разрабатываемой техники;

ПК-6 - способности принимать участие в установке (монтаже), эксплуатации средств защиты;

ПК-7 - способности принимать участие в организации и проведении техниче-

ского обслуживания средств защиты;
ПК-9 - способности ориентироваться в основных нормативно-правовых актах в области обеспечения безопасности;
ПК-12 - готовности использовать знания по организации охраны труда, охраны окружающей среды и безопасности в чрезвычайных ситуациях на объектах экономики;
ПК-14 - способности использовать методы определения нормативных уровней допустимых негативных воздействий на человека и природную среду;
ПК-15 - способностью проводить измерения уровней опасностей в среде обитания, обрабатывать полученные результаты, составлять прогнозы возможного развития ситуации;
ПК-16 - способности анализировать механизмы воздействия опасностей на человека, определять характер взаимодействия организма человека с опасностями среды обитания с учетом специфики механизма токсического действия вредных веществ, энергетического воздействия и комбинированного действия вредных факторов;
ПК-17 - способности определять опасные, чрезвычайно опасные зоны, зоны приемлемого риска;
ПК-18 - способности контролировать состояние используемых средств защиты, принимать решения по замене (регенерации) средства защиты;
ПК-19 - способности ориентироваться в основных проблемах техносферной безопасности;
ПК-20 - способности принимать участие в научно-исследовательских разработках по профилю подготовки: систематизировать информацию по теме исследований, принимать участие в экспериментах, обрабатывать полученные данные;
ПК-21 - способности решать задачи профессиональной деятельности в составе научно-исследовательского коллектива.

В результате изучения дисциплины студент должен:

- **знать** классификацию и структуру научно-исследовательской работы, этапы научно-исследовательской работы, методы теоретических и эмпирических исследований, основы методологии научно-технического творчества;
- **уметь** самостоятельно формулировать задачи исследования и разрабатывать методику проведения эксперимента; применять статистические методы обработки результатов экспериментальных исследований;
- **владеть** навыками поиска и обработки научно-технической информации, выбора методов проведения исследования, физического и математического моделирования, оформления результатов исследований и научно-исследовательских работ.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

1.1. Цели предварительной обработки

Методы обработки данных наблюдений базируются на положениях теории вероятностей и математической статистики.

Предварительная обработка результатов измерений или наблюдений необходима для того, чтобы в дальнейшем с наибольшей эффективностью, а главное – корректно, использовать для построения эмпирических зависимостей статистические методы.

Содержание предварительной обработки в основном состоит в определении характеристик распределения опытных данных, отсеивании грубых погрешностей измерения или погрешностей, неизбежно имеющих место при переписывании цифрового материала или при вводе информации в компьютер.

Другим важным моментом предварительной обработки данных является проверка соответствия распределения результатов измерения закону нормального распределения. Если эта гипотеза неприемлема, то следует определить, какому закону распределения подчиняются опытные данные, и, если это возможно, преобразовать данное распределение к нормальному. Только после выполнения перечисленных выше операций можно перейти к построению эмпирических формул, применяя, например, метод наименьших квадратов.

1.2. Генеральная совокупность и выборка

Для изучения тех или иных явлений природы и общества проводят опыты или наблюдения. Результат опыта, как правило, является случайной величиной, т.е. такой величиной, значение которой нельзя предсказать заранее исходя из условий опыта. Случайная величина обладает целым набором допустимых значений, но в результате каждого отдельного опыта принимает лишь какое-то одно из них. Изменение случайной величины от опыта к опыту связано с неучитываемыми факторами (случайными факторами)

Различают дискретные и непрерывные случайные величины. Возможные значения дискретных случайных величин можно заранее перечислить (число бракованных изделий в партии продукции). Значения непрерывной случайной величины не могут быть заранее перечислены, они непрерывно заполняют некоторый промежуток числовой оси (напряжение в электрической сети).

Набор допустимых значений сам по себе слабо характеризует случайную величину. Чтобы полностью охарактеризовать случайную величину, необходимо не только указать, какие значения она может принимать, но и как часто, т.е. указать вероятность появления тех или иных ее значений.

Всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями, называется законом распределения случайной величины.

Распределение непрерывной случайной величины нельзя задать при помощи вероятностей отдельных значений, так как число этих значений весьма велико. Для непрерывных случайных величин изучается вероятность того, что в результате опыта значение случайной величины попадет в некоторую заранее намеченную совокупность чисел. Удобно пользоваться вероятностью события $X < x$, где x – произвольное действительное число из области значений случайной величины, а X – случайная величина. Эта вероятность является функцией от x

$$P(X < x) = F(x)$$

и называется функцией распределения случайной величины.

Вместо полного определения случайной величины в виде законов распределения вероятностей ее часто определяют при помощи числовых характеристик, выражающих характерные особенности случайной величины и называемых моментами случайной величины.

На практике исследователь всегда располагает лишь ограниченным числом значений случайной величины, представляющим собой некоторую **выборку** из **генеральной совокупности**. Под **генеральной совокупностью** понимают все допустимые значения случайной величины.

При анализе какой-либо технологической случайной величины, непрерывно изменяющейся во времени (например, температура, давление и т.п.) под наблюдаемыми значениями случайной величины понимают значения технологического параметра в дискретные моменты времени, разделенные таким интервалом, при котором соседние значения можно считать полученными из независимых опытов.

Выборка называется репрезентативной (представительной), если она дает достаточное представление об особенностях генеральной совокупности.

Функция распределения, получаемая по выборке, называется эмпирической или выборочной функцией распределения, в отличие от распределения генеральной совокупности, или теоретического распределения.

Если говорить о характеристиках распределений вероятностей, то характеристики теоретических распределений можно рассматривать как характеристики, существующие в генеральной совокупности, а характеристики эмпирических распределений — как выборочные характеристики.

Применяют и другую терминологию. Характеристики распределения вероятностей в генеральной совокупности называют параметрами, а выборочные (эмпирические) значения характеристик — оценками или статистиками.

Хорошая оценка параметра распределения должна обладать свойствами состоятельности, несмещенности и по возможности должна быть эффективной.

Оценка называется состоятельной, если при неограниченном увеличении объема выборки n ее значение сходится по вероятности к оцениваемому параметру.

Оценка называется несмещенной, если при любом объеме выборки n ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру. Для несмещенной оценки отсутствует систематическая погрешность, зависящая от объема выборки n.

Оценка называется эффективной, если среди прочих оценок параметра она имеет наименьшую дисперсию.

1.3. Вычисление характеристик эмпирических распределений

Необходимо, прежде всего, отметить, что здесь и в дальнейшем речь идет только о непрерывно распределенных случайных величинах.

В случае одномерного эмпирического распределения произвольным моментом порядка k называется сумма k-х степеней отклонений результатов наблюдений от произвольного числа c, деленная на объем выборки n:

$$m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)^k \tag{1.1}$$

где k может принимать любые значения натурального ряда чисел.

Если c = 0, то момент называют начальным. Начальный момент первого порядка называется математическим ожиданием (средним значением) случайной величины $\bar{x}$. Действительно, $\bar{x}$ можно определить и по формуле

$$m_1 = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - 0)^1 \tag{1.2}$$

Чаще, чем начальные моменты, применяются центральные моменты.

При c = $\bar{x}$ момент называется центральным. Первый центральный момент равен нулю

$$m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^1 = 0 \tag{1.3}$$

Второй центральный момент называется дисперсией

$$m_2 = S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 . \tag{1.4}$$

Несмещенную оценку для дисперсии теоретического распределения σ^2, можно найти по формуле

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 . \tag{1.5}$$

Выборочные среднеквадратические отклонения соответственно могут быть найдены по формулам

$$S = \sqrt{S^2} \tag{1.6}$$ $$\bar{S} = \sqrt{\bar{S}^2} \tag{1.7}$$

Из других моментов чаще всего используют моменты третьего и четвертого порядка:

$$m_3 = \frac{1}{n}\sum_{I=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3 , \tag{1.8}$$

$$m_3 = \frac{1}{n}\sum_{I=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4 \tag{1.9}$$

Выборочное значение коэффициента вариации v, являющееся мерой относительной изменчивости наблюдаемой случайной величины, вычисляют по формуле

$$v = \frac{\overline{S}}{\overline{x}} \qquad (1.10)$$

Коэффициент вариации может быть вычислен и в процентах:

$$v = \frac{\overline{S}}{\overline{x}} 100\% \qquad (1.11)$$

Пример 1. Определить выборочные характеристики ряда наблюдений за наработкой до отказа 26 однотипных деталей по следующим данным (табл. 1). X – наработка до отказа, тыс. час.

Таблица 1

Вычисление характеристик случайной выборки

№ п/п	X, тыс. час	$X - \overline{X}$	$(X - \overline{X})^2$	$(X - \overline{X})^3$	$(X - \overline{X})^4$
1	50,2	0,4	0,16	0,064	0,0256
2	46,4	-3,4	11,56	-39,304	133,6336
3	52,2	2,4	5,76	13,824	33,1776
4	49,3	-0,5	0,25	-0,125	0,0625
5	48,2	-1,6	2,56	-4,096	6,5536
6	50,5	0,7	0,49	0,343	0,2401
7	54,3	4,5	20,25	91,125	410,0625
8	47,5	-2,3	5,29	-12,167	27,9841
9	50,7	0,9	0,81	0,729	0,6561
10	48,4	-1,4	1,96	-2,744	3,8416
11	52,2	2,4	5,76	13,824	33,1776
12	55,0	5,2	27,04	140,608	731,1616
13	47,2	-2,6	6,76	-17,576	45,6976
14	50,4	0,6	0,36	0,216	0,1296
15	52,7	2,9	8,41	24,389	70,7281
16	45,3	-4,5	20,25	-91,125	410,0625
17	51,2	1,4	1,96	2,744	3,8416
18	49,7	-0,1	0,01	-0,001	0,0001
19	45,0	-4,8	23,04	-110,592	530,8416
20	49,6	-0,2	0,04	-0,008	0,0016
21	50,2	0,4	0,16	0,064	0,0256
22	47,2	-2,6	6,76	-17,576	45,6976
23	52,4	2,6	6,76	17,576	45,6976
24	48,5	-1,3	1,69	-2,197	2,8561
25	49,9	0,1	0,01	0,001	0,0001
26	50,6	0,8	0,64	0,512	0,4096
$\sum$	1294,8	0	158,69	8,508	2536,5658

Таблица 2

Выборочные характеристики распределения

$\bar{x}$	m_1	m_2	m_3	m_4	S	$\bar{S}$	v,%
49,8	0	6,10	0,33	97,56	2,47	2,52	5,06

1.4. Отсев грубых ошибок (погрешностей)

Каждый результат измерения – случайная величина. Отклонение результата наблюдения от истинного называется ошибкой наблюдения. Ошибка наблюдения также есть случайная величина – она является результатом действия только случайных факторов. Если обозначить истинный результат через а, ошибку через ΔX, результат измерения через X, то

$$\Delta X = X - a. \tag{1.12}$$

Различают ошибки трех видов:

1. Грубые ошибки возникают вследствие нарушения основных условий измерения. Результат, содержащий грубую ошибку, резко отличается по величине от остальных измерений.
2. Систематические ошибки постоянны во всей серии измерений или изменяются по определенному закону. Они могут быть устранены введением соответствующих поправок в результаты измерений.
3. Случайные ошибки – ошибки измерения, остающиеся после устранения всех выявленных грубых и систематических ошибок. Они вызываются большим количеством таких факторов, эффекты действия которых столь незначительны, что их нельзя выделить в отдельности.

Существует большое количество способов отсеивания грубых погрешностей наблюдения (аномальных значений). Если в распоряжении экспериментатора имеется выборка небольшого объема $n < 25$, то можно воспользоваться методом вычисления максимального относительного отклонения:

$$\left|x_i - \bar{x}\right| / \bar{S} \le \tau_{1-p}, \tag{1.13}$$

где x_i – крайний (наибольший или наименьший) элемент выборки, по которой подсчитывались $\bar{x}$ и $\bar{S}$; τ_{1-p} – табличное значение статистики τ, вычисленной при доверительной вероятности $q = 1 - p$.

Таким образом, для выделения аномального значения вычисляют

$$\tau = \left|x_i - \bar{x}\right| / \bar{S},$$

которое затем сравнивают с табличным значением τ_{1-p} /П. 1/.

Если $\tau \le \tau_{1-p}$, то наблюдение не отсеивают, если условие не соблюдается, то наблюдение исключают. После исключения того или иного наблюдения или нескольких наблюдений характеристики эмпирического распределения должны быть перечитаны по данным сокращенной выборки.

Квантили распределения статистики τ при уровнях значимости p = 0,10, p = 0,05, p = 0,025, p = 0,01 или доверительной вероятности 1 – p = q = 0,90, 0,95, 0,975, 0,99 приводятся в справочниках по математической статистике. На практике обычно используют уровень значимости p = 0,05 (результат получается с 95%-й доверительной вероятностью).

Процедуру отсева можно повторить и для следующего по абсолютной величине максимального относительного отклонения, но предварительно необходимо пересчитать $\bar{x}$ и $\bar{S}$ для выборки нового объема n – 1.

Рассмотрим другой метод отсева грубых погрешностей для малой выборки. В этом случае вычисляют

$$\tau' = \frac{|x_i - \bar{x}|}{\sqrt{\frac{n-1}{n}}\bar{S}} \qquad (1.14)$$

и полученный результат сравнивают с критическим значением, взятым из таблиц при соответствующих n и 1 – p. В данную формулу по сравнению с предыдущей введен уточняющий коэффициент $\frac{1}{\sqrt{(n-1)/n}}$.

При объеме выборки n > 25 может быть использован метод, основанный на применении таблиц распределения Стьюдента. Эти таблицы /П.2/ имеются практически в любой книге по математической статистике /3, 6/.

Последовательность действий при использовании данного метода следующая.

1. Из ряда наблюдений (измерений) выбирается наблюдение, имеющее наибольшее отклонение (положительное или отрицательное)

$$d_{max} = |x_{max(min)} - \bar{x}|.$$

2. Вычисляется максимальное относительное отклонение

$$\tau = d_{max}/\bar{S}.$$

3. По таблице распределения Стьюдента /П. 2/ находятся процентные точки t-распределения Стьюдента $t_{(p,\ n-2)}$, где p – процентная точка нормированного выборочного отклонения. Принимают две точки p = 5% и p = 0,1%.

4. Вычисляется критическое значение относительного отклонения τ_p, которое выражается через критическое значение распределения Стьюдента $t_{(p,\ n-2)}$ по формуле

$$\tau_{\{p,n)} = \frac{t_{(p,n-2)}\sqrt{n-1}}{\sqrt{n-2+[t_{(p,n-2)}]^2}}. \qquad (1.15)$$

5. Сравнивается значение τ с вычисленными критическими значениями $\tau_{(5\%,\ n)}$ и $\tau_{(0,1\%,\ n)}$.

Максимальные относительные отклонения, полученные в процессе вычисления могут быть разделены на три группы:

1) $\tau \le \tau_{(5\%,\ n)}$; 2) $\tau_{(5\%,n)} \le \tau \le \tau_{(0,1\%,n)}$; 3) $\tau \ge \tau_{(0,1\%,n)}$.

Наблюдения, попавшие в первую группу, нельзя отсеивать ни в коем случае. Наблюдения второй группы можно отсеить, если только имеются какие-либо другие данные в пользу этой процедуры (например, результаты изучения физических, химических и других свойств данного объекта). Наблюдения третьей группы, как правило, отсеивают всегда.

После исключения того или иного наблюдения характеристики эмпирического распределения должны быть пересчитаны по данным сокращенной выборки. После чего повторяют процедуру проверки для следующего по абсолютной величине наибольшего отклонения d_{max}.

Пример 2. Проверить ряд наблюдений за наработкой деталей до отказа (пример 1) на наличие грубых ошибок.

Выбираем наблюдение, имеющее наибольшее отклонение

$$d_{max} = |55 - 49{,}8| = 5{,}2;$$

Вычисляем $\tau = d_{max}/\ \bar{S} = 5{,}2/2{,}52 = 2{,}06$;

По таблице распределения Стьюдента /П. 2/ находим процентные точки t-распределения Стьюдента $t_{(p,\ n-2)}$

$$t_{(5\%,\ 24)} = 1{,}7109,\ t_{(0{,}1\%,\ 24)} = 3{,}4668.$$

Вычисляем критические значения относительного отклонения τ_p,

$$\tau_{5\%,26} = \frac{1{,}7109\sqrt{25}}{\sqrt{24+1{,}7109^2}} = \frac{8{,}5545}{5{,}1891} = 1{,}648\ ;$$

$$\tau_{0{,}1\%,26} = \frac{3{,}4668\sqrt{25}}{\sqrt{24+3{,}4668^2}} = \frac{17{,}334}{6{,}0015} = 2{,}888\ .$$

Сравниваем значение $\tau = 2{,}06$ с вычисленными критическими значениями $\tau_{(5\%,\ 26)}$ и $\tau_{(0{,}1\%,\ 26)}$

$$1{,}648 < 2{,}06 < 2{,}888$$

Выделяющееся наблюдение не отсеивается, т.к. в пользу этой процедуры нет каких-либо дополнительных данных.

Пример 3. Предположим, что при записи в таблицу наблюдений вкралась ошибка, и вместо наработки 55 тыс. час. (строка 12) было записано 65 тыс. час. Проверить новый ряд наблюдений на наличие грубой ошибки.

Пересчитаем $\bar{x}$ и $\bar{S}$ для нового ряда наблюдений. Отклонения и квадраты отклонений вычисляем в табл. 3 Получаем $\bar{x}$ = 50,18, $\bar{S}$ = 3,77.

В этом случае максимальное относительное отклонение будет

$$\tau = d_{max}/\ \bar{S} = |65 - 50{,}18|/3{,}77 = 3{,}93.$$

Полученное значение относительного отклонения больше критического значения при любом р (3,93 > 2,888 > 1,648), следовательно, такое наблюдение должно быть отсеяно как грубая погрешность.

Таблица 3

К вычислению $\bar{x}$ и $\bar{S}$

№ п/п	X , тыс. час	$X - \bar{X}$	$(X - \bar{X})^2$
1	50,2	0,02	0,0004
2	46,4	-3,78	14,2884
3	52,2	2,02	4,0804
4	49,3	-0,88	0,7744
5	48,2	-1,98	3,9204
6	50,5	0,32	0,1024
7	54,3	4,12	16,9744
8	47,5	-2,68	7,1824
9	50,7	0,52	0,2704
10	48,4	-1,78	3,1684
11	52,2	2,02	4,0804
12	65,0	14,82	219,6324
13	47,2	-2,98	8,8804
14	50,4	0,22	0,0484
15	52,7	2,52	6,3504
16	45,3	-4,88	23,8144
17	51,2	1,02	1,0404
18	49,7	-0,48	0,2304
19	45,0	-5,18	26,8324
20	49,6	-0,58	0,3364
21	50,2	0,02	0,0004
22	47,2	-2,98	8,8804
23	52,4	2,22	4,9284
24	48,5	-1,68	2,7225
25	49,9	-0,28	0,0784
26	50,6	0,42	0,1764
$\sum$	1304,8	0,12	355,7945

1.5. Проверка закона нормального распределения опытных данных

Если распределение случайной величины подчиняется определенному закону и может быть хотя бы приближенно описано кривой

$$y = ae^{-bx^2}, \tag{1.16}$$

то такое распределение называют нормальным. Так как к коэффициентам a и b предъявляется требование: $a, b > 0$, то можно говорить о семействе кривых нормального распределения. С увеличением коэффициента a кривая «вытягивается» в высоту, при увеличении коэффициента b кривая «сплющивается».

Нормальное распределение обладает и другими важными свойствами, которые позволяют считать это распределение основой математической статистики. Рассмотрим эти свойства.

1. Ордината y, которая определяет высоту кривой для каждой точки оси Ox (абсциссы), представляет собой плотность вероятности некоторого значения переменной x и определяется следующей формулой:

$$y = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{1.17}$$

где σ – среднеквадратическое отклонение теоретического распределения; μ – среднее значение (математическое ожидание) теоретического распределения.

Из формулы (1.17) следует, что нормальное распределение полностью определяется величинами μ и σ (π = 3,141593... и e = 2,718282... — математические постоянные). Математическое ожидание μ определяет положение кривой распределения относительно оси Ox. Среднеквадратическое отклонение σ определяет форму кривой. Чем больше σ (разброс данных), тем кривая становится более пологой (ее основание более широкое).

2. Кривая нормального распределения симметрична относительно среднего значения.

3. Максимум ординаты кривой

$$y_{\max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}},$$

что при σ = 1 составляет примерно 0,4.

4. Если $x \to \pm\infty$, то $y \to 0$. Другими словами, очень большие и очень малые значения переменной x маловероятны.

5. Примерно 2/3 всех наблюдений лежит в площади, отсекаемой перпендикулярами к оси Ox (μ ± σ). При большом объеме выборки примерно 90 % всех наблюдений лежит между - 1,64σ и + 1,64σ. Границы - 0,675σ и + 0,675σ называют вероятными отклонениями; в этом интервале находится около 50 % всех наблюдений.

6. Для нормального распределения среднее, мода и медиана совпадают.

Для статистических методов построения эмпирических зависимостей очень важно, чтобы результаты наблюдений подчинялись нормальному закону распределения, поэтому проверка нормальности распределения - основное содержание предварительной обработки результатов наблюдений.

1.6. Полигон и гистограмма распределения частот

Если данные наблюдения за непрерывной случайной величиной разделить на интервалы, то можно построить полигон и гистограмму частот.

Разбиение на интервалы можно выполнить по правилу Стерджесса. Число интервалов при этом определяется по формуле

$$k = 1 + 3{,}32\lg n, \tag{1.18}$$

где n – объем выборки.

Разбиение на интервалы выполняется в табличной форме (табл. 4). В этой же таблице ведется подсчет частот. Методика работы при этом следующая. Таблицу наблюдений просматривают по порядку от первой до последней строчки и при чтении каждого результата соответствующую метку (точку или черточку) заносят в тот интервал, к которому относится данное наблюдение (эту работу удобно выполнять вдвоем).

По результатам подсчета абсолютных и относительных частот строят гистограмму 1 и полигон 2 распределений, а также кумулятивную линию 3. (Рис. 1). Гистограмма и полигон распределений являются графическим отображением частот, которые, в свою очередь, представляют собой оценки плотностей вероятностей. Кумулятивная линия – график накопленных частот, в свою очередь оценивающих функцию распределения F(x) в точке x. Очень многие наблюдения в природе при такой обработке дают колоколообразные полигоны распределения.

Пример 4. Построить гистограмму и полигон распределения частот по данным наблюдений за наработкой деталей до отказа (Пример 1)

В данном случае $k = 1 + 3{,}32 \cdot \lg 26 = 5{,}7$. С другой стороны, разница между $x_{\max}$ и $x_{\min}$ (размах варьирования) составляет 55 - 45 = 10 тыс. час. Исходя из этого, примем число интервалов равным 5 с шириной интервала, равной 2 тыс. час.

Разбивку ряда наблюдений на интервалы и подсчет частот сводим в табл. 4.

Таблица 4

Разбивка массива исходных данных на интервалы, вычисление частот

№п/п	Интервалы	Середины интервалов	Подсчет частот	Частоты		
				абсолютные	относительные	относительные накопленные
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1.	От 45 до 47	46	/ / /	3	0,115	0,115
2.	От 47 до 49	48	/ / / / / /	6	0,231	0,346
3.	От 49 до 51	50	/ / / / / / / / / /	10	0,385	0,731
4.	От 51 до 53	52	/ / / / /	5	0,192	0,923
5.	От 53 до 55	54	/ /	2	0,077	1,000

По данным табл. 4 строим гистограмму и полигон распределения частот, а также кумулятивную линию (интегральную кривую) (Рис. 1).

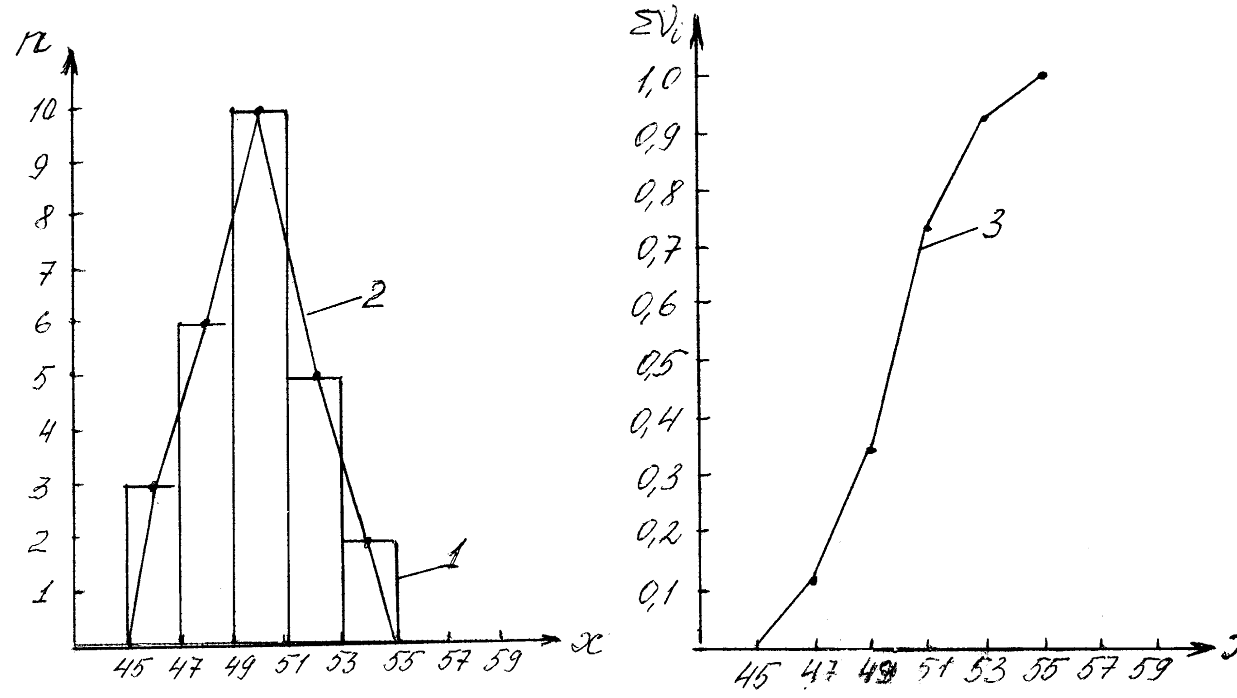


Рис.1. Гистограмма (1), полигон (2) частот и кумулятивная линия (3)

1.7. Проверка гипотезы нормальности распределения

Некоторое представление о близости эмпирического распределения к нормальному может дать анализ показателей асимметрии и эксцесса. Показатель асимметрии можно определить, используя данные табл. 2, по формуле

$$g_1 = \frac{m_3}{m_2^{3/2}}. \tag{1.19}$$

Для симметричных распределений $m_3 = 0$ и $g_1 = 0$.

Для удобства сравнения эмпирического распределения и нормального в качестве показателя эксцесса принимают величину

$$g_2 = \frac{m_4}{m_2^2} - 3. \tag{1.20}$$

Для нормального распределения $m_4/m_2^2 = 3$ и $g_2 = 0$.

Несмещенные оценки для показателей асимметрии и эксцесса определяют по формулам

$$G_1 = \frac{\sqrt{n(n-1)}}{n-2} g_1, \tag{1.21}$$

$$G_2 = \frac{n-1}{(n-2)(n-3)}[(n+1)g_2 + 6]. \tag{1.22}$$

Для проверки гипотезы нормальности распределения следует также вычислить среднеквадратические отклонения для показателей асимметрии и эксцесса

$$S_{G_1} = \sqrt{\frac{6n(n-1)}{(n-2)(n+1)(n+3)}}\ , \tag{1.23}$$

$$S_{G_2} = \sqrt{\frac{24n(n-1)^2}{(n-3)(n-2)(n+3)(n+5)}}\ . \tag{1.24}$$

Если выполняются условия $|G_1| \le 3S_{G1}$, $|G_2| \le 5S_{G2}$, то гипотеза нормальности исследуемого распределения может быть принята.

Пример 5. Проверить нормальность распределения ряда наблюдений за наработкой деталей до отказа (данные примера 1) путем анализа показателей асимметрии и эксцесса.

В рассматриваемом примере

$$g_1 = m_3/m^{3/2}{}_2 = 0{,}33/(6{,}10)^{3/2} = 0{,}022 \neq 0,$$

т.е. некоторая асимметрия имеет место.

$$g_2 = m_4/m^2{}_2 - 3 = 97{,}56/(6{,}10)^2 - 3 = -0{,}38 < 0.$$

Имеется также и небольшой эксцесс.

$$G_1 = \frac{\sqrt{26 \cdot 25}}{24} 0{,}022 = 0{,}023\,;$$

$$G_2 = \frac{25}{24 \cdot 23}\left[27 \cdot (-0.38) + 6\right] = -0{,}193\,.$$

$$S_{G_1} = \sqrt{\frac{6 \cdot 26 \cdot 25}{24 \cdot 27 \cdot 29}} = 0{,}456\,;\ S_{G_2} = \sqrt{\frac{24 \cdot 26 \cdot 25^2}{23 \cdot 24 \cdot 29 \cdot 31}} = 0{,}886\,.$$

В данном примере 0,023 < 3·0,456 и 0,193 < 5·0,886, следовательно, выполнение указанных условий свидетельствует о том, что гипотеза нормальности исследуемого распределения может быть принята.

Рассмотрим методику проверки гипотезы нормальности распределения по χ^2-критерию. Применение критерия χ^2 предполагает также использование свойств так называемого стандартного нормального распределения (при $\mu = 0$ и $\sigma = 1$). Уравнение кривой стандартного нормального распределения имеет вид

$$y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\ . \tag{1.25}$$

Значения ординат кривой стандартного нормального распределения протабулированы и приведены в табл. / П. 3/.

Значения χ^2-критерия вычисляются по формуле

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n_{mi})^2}{n_{mi}}\ , \tag{1.26}$$

где n_i – наблюдаемая абсолютная частота (табл. 4); n_{mi} – частота, ожидаемая по стандартному нормальному распределению.

Вычисленное значение χ^2-критерия сравнивается с критическим, которое определяется по таблицам П.4 в зависимости от уровня значимости р и числа степеней свободы $\nu = k - c - 1$, где с – число параметров закона распределения (с = 2, так как оцениваются два параметра: $\bar{x}$ и $\bar{S}$); k – число интервалов.

Пример 6. Проверить нормальность распределения ряда наблюдений за наработкой деталей до отказа (данные примера 1) с помощью χ^2-критерия.

Расчеты выполняем в табличной форме (табл. 5), используя данные табл. 4. Вычисленный в табл. 5 критерий $\chi^2 = 0,6518$. Число степеней свободы $\nu = k - c - 1 = 5 - 2 - 1 = 2$. По табл. П. 4 находим табличное значение: $\chi^2_{(2,\ 5\%)} = 5,991 > \chi^2 = 0,6518$. Таким образом, гипотеза о том, что наблюдаемые частоты распределены нормально, принимается на 5 %-ном уровне.

1.8. Преобразование распределений к нормальному

Если гипотеза нормальности распределения не может быть принята, то с помощью существующих методов удается иногда так преобразовать исходные данные, что их распределение будет подчиняться нормальному закону. После получения окончательного результата надо выполнить обратное преобразование.

В самом начале операции преобразования данных большую помощь могут оказать гистограмма и полигон распределения, приведенные на рис. 1. При обработке результатов наблюдений в медицине, биологии, материаловедении, экономике и других отраслях знаний встречаются логарифмические нормальные распределения, особенностью которых является крутая левая ветвь полигона и пологая правая (полигон явно асимметричен). Логарифмические нормальные распределения играют большую роль в математической статистике, так как встречаются очень часто в практике обработки наблюдений и легко преобразуются к нормальному распределению. Нельзя проводить, например, регрессионный анализ по результатам наблюдений, распределенных логарифмически нормально, без их предварительного преобразования.

При логарифмировании исходных данных левая ветвь кривой распределения сильно растягивается, и распределение принимает приближенно нормальный характер. Если при преобразовании $x' = \lg x$ получаются значения, расположенные между 0 и 1, то все вновь полученные значения для удобства расчетов и во избежание получения отрицательных параметров необходимо умножить на 10 в соответствующей степени, чтобы все цифры были больше единицы, т.е. выполнить преобразование $x'' = \lg x \cdot 10^a$.

Асимметричное распределение с одной вершиной часто приводится к нормальному преобразованием $x' = \lg(x \pm a)$. В отдельных случаях можно применять и другие преобразования:

а) обратная величина $x' = 1/x$;

б) обратное значение квадратных корней $x' = 1/\sqrt{x}$.

Таблица 5

Процедура вычисления критерия χ^2

№№ интервалов	Середины интервалов x	Частоты n_i	$n_i x$	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$n_i (x-\bar{x})^2$	$z=\frac{\lvert(x-\bar{x})\rvert}{\bar{S}}$	f(z)	$n_{\tau i} = f(z)k'$	$n_i - n_{\tau i}$	$(n_i - n_{\tau i})^2$	$(n_i - n_{\tau i})^2 / n_{ni}$
1	46	3	138	-3,77	14,21	42,63	1,70	0,0940	2,21	0,79	0,6241	0,2824
2	48	6	288	-1,77	3,13	18,78	0,80	0,2897	6,82	-0,82	0,6724	0,0986
3	50	10	500	0,23	0,05	0,5	0,10	0,3970	9,34	0,66	0,4356	0,0466
4	52	5	260	2,23	4,97	24,85	1,01	0,2396	5,64	-0,64	0,4096	0,0726
5	54	2	108	4,23	17,89	35,78	1,91	0,0644	1,52	0,48	0,2304	0,1516
		26	1294			122,54						0,6518

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x}{n} = \frac{1294}{26} = 49{,}77 \ ; \bar{S} = \sqrt{\frac{\sum n_i (x-\bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{122{,}54}{25}} = 2{,}21; \ k' = \frac{nb}{\bar{S}} = \frac{26*2}{2{,}21} = 23{,}53; \ b = 2 \text{ – ширина интервала;}$$

$$\chi^2 = 0{,}6518$$

Для распределений, смещенных вправо, матрицу исходных данных преобразуют по формуле $x' = x^a$ (при a = 1,5; 2).После каждого преобразования реализуют процедуру вычисления χ^2 и окончательно принимают то преобразование, которое дает минимальное χ^2. Для принятия гипотезы нормальности преобразованного распределения должно соблюдаться условие $\chi^2 < \chi^2_{(\nu;\, p)}$.

Пример 7. Проверить соответствие данных следующей выборки нормальному закону распределения и в случае несоответствия выполнить преобразование данных.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
x	22	24	25	26	27	32	33	35	37	39	41	43	44	46	49	50	52	53	55

№	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	37	37
x	56	59	62	65	66	69	71	74	77	82	86	92	95	98	103	112	118	125

№	38	39
x	136	152

Разбиваем ряд наблюдений на интервалы и подсчитываем частоты (табл. 6)

Таблица 6

Разбивка массива исходных данных на интервалы, вычисление частот

№ п/п	Интервалы	Середины интервалов	Подсчет частот	Частоты		
				абсолютные	относительные	относительные накопленные
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1.	20 – 40	30	//////////	10	0,256	0,256
2.	40 – 60	50	///////////	11	0,282	0,538
3.	60 – 80	70	/ / / / / / /	7	0,180	0,718
4.	80 – 100	90	/ / / / /	5	0,128	0,846
5.	100 – 120	110	/ / /	3	0,077	0,923
6.	120 – 140	130	/ /	2	0,051	0,974
7.	140 – 160	150	/	1	0,026	1,00

Таблица 7

Проверка гипотезы нормальности распределения для непреобразованных данных

№№ классов	Интервалы	Середины интервалов x	Частоты n_i	$n_i x$	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$n_i(x-\bar{x})^2$	$z=\frac{\lvert x-\bar{x}\rvert}{\bar{S}}$	f(z)	f(z)k′	n_{mi}	n_i-n_{mi}	$(n_i-n_{mi})^2$	$\frac{(n_i-n_{mi})^2}{n_{mi}}$
1	20 – 40	30	10	300	-34,87	1215,92	12159,2	1,08	0,2227	5,37	5,37	4,63	21,44	3,99
2	40 – 60	50	11	550	-14,87	221,12	2432,32	0,46	0,3589	8,65	8,65	2,35	5,52	0,64
3	60 – 80	70	7	490	5,13	26,17	183,19	0,16	0,3939	9,49	9,49	-2,49	6,20	0,65
4	80 – 100	90	5	450	25,13	631,52	3157,6	0,78	0,2943	7,09	7,09	-2,09	4,37	0,62
5	100 – 120	110	3	330	45,13	2036,72	6110,16	1,40	0,1497	3,61	5,18	0,82	0,67	0,13
6	120 – 140	130	2	260	65,13	4241,92	8483,84	2,01	0,0529	1,27				
7	140 – 160	150	1	150	85,13	7247,12	7247,12	2,63	0,0126	0,30				
			39	2530			39773,43							6,03

$\bar{x}=\sum n_i x/n = \dfrac{2530}{39} = 64{,}87$; $\bar{S} = \sqrt{\dfrac{\sum n_i(x-\bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\dfrac{39773{,}43}{38}} = 32{,}35$; $k' = \dfrac{nb}{\bar{S}} = \dfrac{39\cdot 20}{32{,}35} = 24{,}1$; b=20 – размер интервала;

$$v = \frac{\bar{S}}{\bar{x}}100\% = \frac{32{,}35}{64{,}87}100\% = 49{,}9\% > 33\%; \quad \chi^2 = 6{,}03 > \chi^2_{(2,\,5\%)} = 5{,}991$$

Данные выборки не соответствуют нормальному закону распределения

Таблица 8

Преобразование данных

№№ п/п	x	$x' = lg\ x$	$x'' = x'100$	№№ п/п	x	$x' = lg\ x$	$x'' = x'100$	№№ п/п	x	$x' = lg\ x$	$x'' = x'100$
1	22	1,3424	134,24	14	46	1,6628	166,28	27	74	1,8692	186,92
2	24	1,3802	138,02	15	49	1,6902	169,02	28	77	1,8865	188,65
3	25	1,3979	139,79	16	50	1,6990	169,90	29	82	1,9138	191,38
4	26	1,4150	141,50	17	52	1,7160	171,60	30	86	1,9345	193,45
5	27	1,4314	143,14	18	53	1,7243	172,43	31	92	1,9638	196,38
6	32	1,5051	150,51	19	55	1,7404	174,04	32	95	1,9777	197,77
7	33	1,5185	151,85	20	56	1,7482	174,82	33	98	1,9912	199,12
8	35	1,5441	154,41	21	59	1,7708	177,08	34	103	2,0128	201,28
9	37	1,5682	156,82	22	62	1,7924	179,24	35	112	2,0492	204,92
10	39	1,5911	159,11	23	65	1,8129	181,29	36	118	2,0719	207,19
11	41	1,6128	161,28	24	66	1,8195	181,95	37	125	2,0969	209,69
12	43	1,6335	163,35	25	69	1,8388	183,88	38	136	2,1335	213,35
13	44	1,6434	164,34	26	71	1,8512	185,12	39	152	2,1818	218,18

Таблица 9

Проверка гипотезы нормальности распределения для данных, преобразованных по формуле $x'' = lg\ x \cdot 100$

№№ классов	Интервалы	Середины интервалов x	Частоты n_i	$n_i x$	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$n_i(x-\bar{x})^2$	$z = \frac{\lvert x-\bar{x}\rvert}{\bar{S}}$	f(z)	f(z)k′	n_{mi}	$n_i - n_{mi}$	$(n_i - n_{mi})^2$	$\frac{(n_i-n_{mi})^2}{n_{mi}}$
1	134– 146	140	5	700	-35,38	1251,74	6258,7	1,59	0,1127	2,38				
2	146 – 158	152	4	608	-23,38	546,62	2186,48	1,05	0,2299	4,85	7,23	1,77	3,13	0,43
3	158 – 170	164	7	1148	-11,38	129,50	906,5	0,51	0,3503	7,39	7,39	-0,39	0,15	0,02
4	170 – 182	176	8	1408	0,62	0,38	3,04	0,03	0,3988	8,41	8,41	-0,41	0,17	0,02
5	182 – 194	188	6	1128	12,62	159,26	955,56	0,57	0,3391	7,16	7,16	-1,16	1,34	0,19
6	194 – 206	200	5	1000	24,62	606,14	3030,7	1,11	0,2155	4,55	6,71	2,29	5,24	0,78
7	206 – 218	212	4	848	36,62	1341,02	5364,08	1,65	0,1023	2,16				
			39	6840			18705,06							1,44

$\bar{x} = \sum n_i x / n = \dfrac{6840}{39} = 175{,}38$; $\bar{S} = \sqrt{\dfrac{\sum n_i (x-\bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\dfrac{18705{,}06}{38}} = 22{,}19$; $k' = \dfrac{nb}{\bar{S}} = \dfrac{39 \cdot 12}{22{,}19} = 21{,}1$; $b = 12$ – размер интервала; $v = \dfrac{\bar{S}}{\bar{x}} 100\% = \dfrac{22{,}19}{175{,}38} 100\% = 12{,}65\% < 33\%$; $\chi^2 = 1{,}44 < \chi^2_{(2,\ 5\%)} = 5{,}991$

Преобразованные данные соответствуют нормальному закону распределения

2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ПАРНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

2.1. Метод наименьших квадратов в простейшем случае двумерного пространства (на плоскости). Уравнение регрессии

Подавляющее большинство всех формул, используемых в естественно-научных и технических дисциплинах, относится к так называемым парным зависимостям типа y = f(x). По результатам экспериментов такие формулы обычно строят, применяя метод наименьших квадратов.

Сама по себе процедура линейного парного регрессионного анализа (метода наименьших квадратов на плоскости) очень проста, и для ее выполнения достаточно калькулятора.

Регрессия – это односторонняя вероятностная зависимость, когда одна из переменных служит причиной для изменения другой.

Пусть имеется n пар наблюдений значений функции отклика y_i, полученных при фиксированных значениях независимой переменной фактора x_i. Для графического изображения этих пар наблюдений в виде экспериментальных точек с координатами *x; y* на плоскости применяется система декартовых координат.

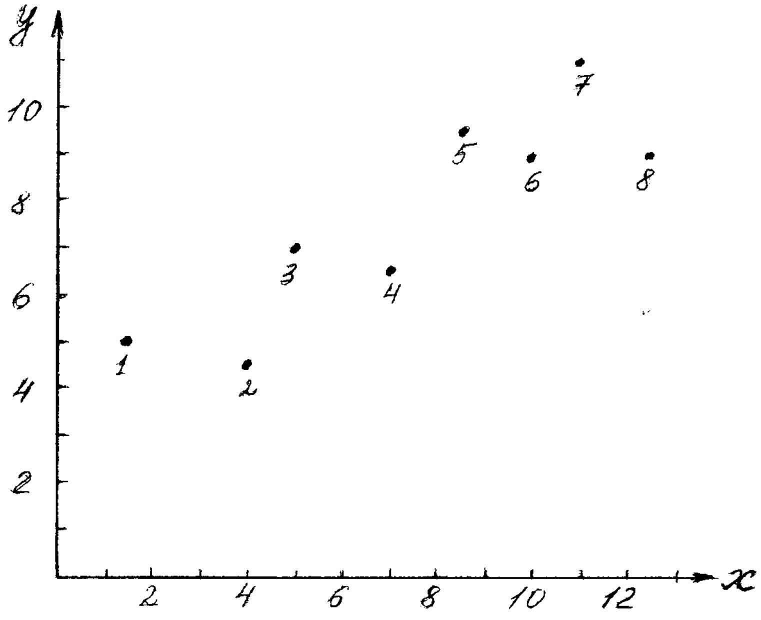


Рис. 2. Графическое изображение координат точек (x_i, y_i)

Координаты точек 1 – 8, изображенных на рис. 2, приведены в табл. 10. Такие результаты наблюдений могут быть получены в любой экспериментальной работе.

Таблица 10

Координаты точек

	1	2	3	4	5	6	7	8
x	1,5	4,0	5,0	7,0	8,5	10,0	11,0	12,5
y	5,0	4,5	7,0	6,5	9,5	9,0	11,0	9,0

Задача линейного регрессионного анализа (метода наименьших квадратов) состоит в том, чтобы, зная положение точек 1 - 8 на плоскости, так провести линию регрессии, чтобы сумма квадратов отклонений Δ_i^2, вдоль оси *Oy* (ординаты) этих точек U от проведенной прямой была минимальной.

Для проведения вычислений по классическому методу наименьших квадратов (для проведения регрессионного анализа) к выдвигаемой гипотезе (к форме уравнения регрессии) предъявляется такое требование: это уравнение должно быть линейным по параметрам или допускать возможность линеаризации. Так, например, процедура проведения регрессионного анализа одинакова для уравнений $y = b_0 + bx$ и $y = b_0 + bz^2$, так как подстановка $x = z^2$ приводит второе уравнение к первому. Для простоты и более легкого освоения методики регрессионного анализа предположим (на первых порах), что при проведении парного линейного регрессионного анализа имеем дело только с уравнением прямой линии (следует помнить, что это допущение делается только для упрощения усвоения начальных элементарных сведений по методике построения формул по опытным данным).

Уравнение прямой на плоскости в декартовых координатах

$$y = b_0 + b_1 x \tag{2.1}$$

где b_0, b_1 – постоянные числа, геометрическая интерпретация которых дана ниже.

Учитывая это, задачу метода наименьших квадратов аналитически можно выразить следующим образом:

$$U = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \left(b_0 + b_1 x_i\right)\right]^2 \to \min \tag{2.2}$$

где $y_i - (b_0 + b_1 x_i) = \Delta_i$ или

$$U = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2 \to \min \tag{2.3}$$

Формулы (2.2) и (2.3) словами кратко можно выразить так: сумма квадратов отклонений вдоль оси **Oy** должна быть минимальной (принцип Лежандра).

Построенная таким образом линия регрессии позволяет в данном случае с некоторой вероятностью предсказать в интервале от x = 1,5 до x = 12,5 любые значения функции *y* при отсутствующих в табл. 10 значениях фактора *x*.

Для решения задачи, поставленной в формуле (2.2), необходимо в каждом конкретном случае вычислить значения коэффициентов b_0 и b_i, минимизирующие сумму отклонений U. Для этого, как известно из математического анализа, необходимо вычислить частные производные функции U по коэффициентам b_0 и b_1 и приравнять их нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial b_0} = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial b_1} = 0 \end{cases} \qquad (2.4)$$

Решая эту систему уравнений, находим искомые значения b_0 и b_i. Систему (2.4) называют системой нормальных уравнений. В систему (2.4) подставляют значение U из формулы (2.2) и одновременно выполняют операцию дифференцирования:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial b_0} = \sum\limits_{i=1}^{n} \left[y_i - (b_0 + b_1 x_i) \right] = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial b_1} = \sum\limits_{i=1}^{n} \left[y_i - (b_0 + b_1 x_i) \right] x_i = 0 \end{cases} \qquad (2.5)$$

Преобразуем полученную систему нормальных уравнений:

$$b_0 n + b_1 \sum x_i = \sum y_i$$

$$b_0 \sum x_i + b_1 \sum x_i^2 = \sum (y_i x_i) \qquad (2.6)$$

В формуле (2.6) и далее для краткости у знака суммы ($\sum$) опущены индексы. Систему (2.6) решаем с помощью определителей

$$b_0 = \frac{\Theta_1}{\Theta}, \qquad b_1 = \frac{\Theta_2}{\Theta} \qquad (2.7)$$

где Θ – главный определитель.

Имеем:

$$\Theta = \begin{vmatrix} n & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{vmatrix} = n \sum x^2 - \left(\sum x \right)^2 \qquad (2.8)$$

$$\Theta_1 = \begin{vmatrix} \sum y & \sum x \\ \sum xy & \sum x^2 \end{vmatrix} = \sum y \sum x^2 - \sum xy \sum x \qquad (2.9)$$

$$\Theta_2 = \begin{vmatrix} n & \sum y \\ \sum x & \sum xy \end{vmatrix} = n \sum xy - \sum x \sum y \qquad (2.10)$$

Откуда

$$b_0 = \frac{\sum y \sum x^2 - \sum xy \sum x}{n \sum x^2 - \left(\sum x \right)^2} \qquad (2.11)$$

$$b_1 = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} \qquad (2.12)$$

Как и другие статистические расчеты, вычисление коэффициентов регрессии удобно проводить в табличной форме.

Пример 8. По данным табл. 10 построить уравнение линейной регрессии.

На примере построения линии регрессии по данным табл. 10 можно рассмотреть практическую методику вычисления коэффициентов регрессии, которая приведена в табл. 11.

Таблица 11

Методика вычисления коэффициентов регрессии

№ п/п	x	y	x^2	y^2	xy	x + y	$(x + y)^2$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	1,5	5,0	2,25	25,0	7,50	6,50	42,25
2	4,0	4,5	16,00	20,25	18,00	8,50	72,25
3	5,0	7,0	25,00	49,00	35,00	12,00	144,00
4	7,0	6,5	49,00	42,25	45,50	13,50	182,25
5	8,5	9,5	72,25	90,25	80,75	18,00	324,00
6	10,0	9,0	100,00	81,00	90,00	19,00	361,00
7	11,0	11,0	121,00	121,00	121,00	22,00	484,00
8	12,5	9,0	156,25	81,00	112,50	21,5	462,25
$\sum$	59,5	61,5	541,75	509,75	510,25	121,00	2072,00

Средние значения

$$\bar{x} = 7{,}4375, \quad \bar{y} = 7{,}6875$$

Для проверки правильности вычислений в табл. 11 можно использовать выражение

$$\sum (x_i + y_i)^2 = \sum x_i^2 + 2\sum x_i y_i + \sum y_i^2 \qquad (2.13)$$

Значения сумм подставляем в формулу (2.13). Получаем 2072,00 = 541,75 + 2·510,25 + 509,75; 2072,00 = 2072,00. Следовательно, вычисления выполнены правильно. В формулы (2.11) и (2.12) подставляем найденные значения для сумм из табл. 11, в результате получаем

b_0 = (61,50 • 541,75 – 510,25 • 59,50)/(8 • 541,75 – 3540,25) = 3,73,

b_i = (8 • 510,25 – 59,50 • 61,50)/(8 • 541,75 – 3540,25) = 0,53.

Уравнение регрессии или формула, которая отображает с некоторой вероятностью зависимость y от x, построенная по экспериментальным точкам, изображенным на рис. 2, имеет вид

$$y = 3{,}73 + 0{,}53x. \qquad (2.14)$$

Это пример парной линейной зависимости.

2.2. Парная корреляция. Вычисление коэффициента парной корреляции

Различают два вида связи: функциональную и стохастическую. Линейная функциональная связь имела бы место в том случае, если все опытные точки (рис. 2) располагались на прямой регрессии. При наличии погрешностей измерения имеет место разброс точек относительно линии регрессии, и связь между y и x является стохастической (вероятностной). Оценивать корреляцию между y и x по коэффициенту парной корреляции.

Для функциональной связи понятие корреляции практически не имеет смысла (коэффициент парной корреляции всегда равен 1). Для стохастической связи вычисление коэффициента парной корреляции r между y и x и его статистическая оценка — важная процедура, результаты проведения которой позволяют судить о тесноте связи. Коэффициент r может изменяться от -1 до 1. Чем ближе r к единице, тем ближе изучаемая зависимость к функциональной.

Если переменные y и x представляют двумерную нормально распределенную случайную величину, то существует две регрессии. Одна определяет зависимость y от x, а другая – x от y. Прямые регрессии пересекаются в центре тяжести (x; y) и образуют «ножницы». Чем уже «ножницы», тем ближе стохастическая связь с функциональной. При функциональной связи обе прямые сливаются.

Модель $\hat{y} = b_{0(yx)} + b_{1(yx)}x$ можно условно назвать прямой регрессией, а модель $\hat{x} = b_{0(xy)} + b_{1(xy)}y$ - обратной регрессией. Это означает, что уравнение $\hat{y} = b_0 + b_1 x$ не является алгебраическим, из которого можно непосредственно найти x, так как эта модель получена минимизацией суммы квадратов отклонений вдоль оси Oy.

Чтобы вычислить x по y (обратная регрессия), следует минимизировать сумму квадратов отклонений вдоль оси Ox. Выбор того или иного уравнения регрессии произволен / 6 / и зависит от того, какую из случайных величин, x или y, считают заданной (независимой переменной).

Формулы для вычислений коэффициентов b_0 и b_1 в случае прямой регрессии приведены выше [формулы 2.11, 2.12]. При обратной регрессии коэффициенты вычисляют по формулам

$$b_{0(xy)} = \frac{\sum x \sum y^2 - \sum xy \sum y}{n\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2}, \tag{2.15}$$

$$b_{1(xy)} = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2}. \tag{2.16}$$

Коэффициент парной корреляции определяется как

$$\hat{r} = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{\left[n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2\right]\left[n\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2\right]}}. \qquad (2.17)$$

Если в формуле (2.17) числитель и знаменатель разделить на n, то получим

$$\hat{r} = \frac{\sum xy - \frac{1}{n}\sum x \sum y}{\sqrt{\left[\sum x^2 - \frac{1}{n}\left(\sum x\right)^2\right]\left[\sum y^2 - \frac{1}{n}\left(\sum y\right)^2\right]}}. \qquad (2.18)$$

В литературе можно встретить формулу для вычисления коэффициента корреляции с использованием средних

$$\hat{r} = \frac{\sum (x - \bar{x})(y = \bar{y})}{\sqrt{\sum (x - \bar{x})^2 \sum (y - \bar{y})^2}}. \qquad (2.19)$$

Оценить тесноту связи по коэффициенту парной корреляции можно используя шкалу Шеддока: r < 0,2 – связи нет; 0,2 ≤ r < 0,5 – слабая связь; 0,5 ≤ r < 0,75 – средняя связь; 0,75 ≤ r < 0,95 – тесная связь; 0,95 ≤ r < 1 – очень тесная.

Процедуру вычисления коэффициентов регрессии, корреляции и некоторых других величин, необходимых для их статистического оценивания, можно упростить, если предварительно вычислить следующие промежуточные величины

$$Q_x = \sum x^2 - \frac{1}{n}\left(\sum x\right)^2; \qquad (2.20)$$

$$Q_y = \sum y^2 - \frac{1}{n}\left(\sum y\right)^2; \qquad (2.21)$$

$$Q_{xy} = \sum xy - \frac{1}{n}\sum x \sum y. \qquad (2.22)$$

Проверку правильности вычисления величин Q_x, Q_y, Q_{xy} можно выполнить используя соотношение

$$Q_x + Q_y + 2Q_{xy} = \sum (x + y)^2 - \frac{1}{n}\left[\sum (x + y)\right]^2. \qquad (2.23)$$

Далее вычисления проводят в следующем порядке:

1) находят средние значения

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} \qquad \bar{y} = \frac{\sum y}{n};$$

2) вычисляют коэффициенты регрессии и коэффициент корреляции

$$b_{1(yx)} = \frac{Q_{xy}}{Q_x}; \qquad b_{1(xy)} = \frac{Q_{xy}}{Q_y};$$

$$b_{0(yx)} = \bar{y} - b_{1(yx)}\bar{x}\,; \quad b_{0(xy)} = \bar{x} - b_{1(xy)}\bar{y}\,;$$

$$r = \frac{Q_{xy}}{\sqrt{Q_x Q_y}}\,;$$

3) определяют стандартные ошибки

$$\bar{S}_x = \sqrt{\frac{Q_x}{n-1}}\,, \qquad \bar{S}_y = \sqrt{\frac{Q_y}{n-1}}\,,$$

$$\bar{S}_{xy} = \frac{Q_{xy}}{n-1}\,, \qquad \bar{S}_{yx} = \sqrt{\frac{Q_{yx}}{n-2}}\,,$$

где $Q_{yx} = Q_y - b_{1(yx)} Q_{xy}$.

$$S_{b1(yx)} = \frac{\bar{S}_{yx}}{\sqrt{Q_x}}\,, \qquad \bar{S}_{b0(yx)} = \bar{S}_{yx}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{Q_x}}\,;$$

4) выполняют проверку правильности вычислений

$$r = \frac{Q_{xy}}{\sqrt{Q_x Q_y}} = \frac{\bar{S}_{xy}}{\bar{S}_x \bar{S}_y} = \sqrt{b_{1(yx)} b_{1(xy)}}\,,$$

$$\frac{\bar{S}_{b0(yx)}}{\bar{S}_{b1(yx)}} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n}}\,.$$

Пример 9. По данным табл. 10 определить коэффициенты регрессии и парной корреляции путем вычисления величин Q_x, Q_y, Q_{xy}.

Определяем промежуточные величины Q_x, Q_y, Q_{xy}.
$Q_x = 541{,}75 - (1/8)59{,}5^2 = 99{,}22$;
$Q_y = 509{,}75 - (1/8)61{,}5^2 = 36{,}97$;
$Q_{xy} = 510{,}25 - (1/8)59{,}5 \cdot 61{,}5 = 52{,}84$;
Проверка правильности вычислений:
$2072 - 121^2/8 = 241{,}88$;
$99{,}22 + 36{,}97 + 2 \cdot 52{,}84 = 241{,}87$;
$241{,}88 \approx 241{,}87$.
Вычисляем средние значения
$\bar{x} = 59{,}5/8 = 7{,}4375$; $\bar{y} = 61{,}5/8 = 7{,}6875$;
Определяем коэффициенты прямой и обратной регрессии
$b_1 = 52{,}84/99{,}22 = 0{,}53$; $b_0 = 7{,}6875 - 0{,}53 \cdot 7{,}4375 = 3{,}74$;
$b_1' = 52{,}84/36{,}97 = 1{,}43$; $b_0' = 7{,}4375 - 1{,}43 \cdot 7{,}6875 = -3{,}56$;
Вычисляем стандартные ошибки
$\bar{S}_x = \sqrt{99{,}22/7} = 3{,}76$; $\bar{S}_y = \sqrt{36{,}97/7} = 2{,}30$;

$\bar{S}_{xy} = 52{,}84/7 = 7{,}55$; $\bar{S}_{yx} = \sqrt{8{,}96/6} = 1{,}22$;

$Q_{yx} = 36{,}97 - 0{,}53 \cdot 52{,}84 = 8{,}96$; $\bar{S}_{b_1} = 1{,}22/\sqrt{99{,}22} = 0{,}12$;

$\bar{S}_{b_0} = 1{,}22\sqrt{1/8 + 7{,}4375^2/99{,}22} = 1{,}0$;

Проверка вычислений

$r = 52{,}84/\sqrt{99{,}22 \cdot 36{,}97} = 7{,}55/3{,}76 \cdot 2{,}30 = \sqrt{0{,}53 \cdot 1{,}43} = 0{,}87$;

$1/0{,}12 = \sqrt{541{,}75/8}$; $8{,}33 \approx 8{,}23$.

2.3. Статистическое оценивание парной корреляции и регрессии

Для статистического оценивания коэффициентов регрессии проверяют нуль-гипотезу H_0: $\beta = 0$, т.е. отличается ли статистически значимо коэффициент регрессии от нуля. Границу значимости устанавливают на основании распределения Стьюдента:

$$\hat{t} = \frac{|b|}{\bar{S}_b} \geq t^{табл.}_{(n-2;\,p)}, \qquad (2.24)$$

где β – значение коэффициента регрессии в генеральной совокупности; b – выборочная оценка коэффициента регрессии; $t^{табл.}_{(n-2;\,p)}$ находят по табл. П.2

Если условие (2.24) выполняется, то β значимо отличается от нуля.

Оценку значимости коэффициента парной корреляции выполняют по формуле

$$\hat{t} = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \geq t^{табл.}_{n-2;\,p}. \qquad (2.25)$$

Если это условие выполняется, то гипотезу H_0: $r = 0$ отклоняют.

Для проверки значимости (адекватности) уравнения регрессии в целом используют F-критерий Фишера

$$F = \frac{\bar{S}_y^2}{\bar{S}_{yост}^2}, \qquad (2.26)$$

где $\bar{S}_y^2 = \frac{Q_y}{n-1} = \frac{\sum y^2 - \frac{1}{n}\left(\sum y\right)^2}{n-1}$ - общая дисперсия; $\bar{S}_{yост}^2 = \frac{\sum (y-\hat{y})^2}{n-2}$ - остаточная дисперсия

Расчетное значение критерия Фишера сравнивают с критическим $F^{m}_{(\nu_1,\nu_2,p)}$, которое определяется по таблицам П.5, П.6 при числах степеней свободы $\nu_1 = n-1$, $\nu_2 = n-2$ и уровне значимости р = 5 % (или 10%). Уравнение регрессии адекватно описывает опытные данные, если расчетное значение критерия Фишера больше его критического значения при принятом уровне значимости.

Пример 10. Проверить статистическую значимость коэффициентов уравнения регрессии, полученного в предыдущем примере, и уравнения в целом (его адекватность).

Статистическое оценивание коэффициентов прямой регрессии и парной корреляции

$t_{b_0} = 3{,}74/1 = 3{,}74$; $t_{b_1} = 0{,}53/0{,}12 = 4{,}42$; $> t^{табл}_{(6,5\%)} = 1{,}94$.

Следовательно, коэффициенты регрессии статистически значимы.

$$t_r = \frac{0{,}87\sqrt{6}}{\sqrt{1-0{,}87^2}} = 4{,}32 > 1{,}94.$$

Коэффициент парной корреляции – статистически значимая величина (имеет место корреляция между x и y).

Вычисляем остаточную дисперсию с использованием данных табл. 11 и формулы y = 3,73 + 0,53x. Расчет сводим в табл. 12.

Таблица 12

К вычислению остаточной дисперсии

№ п/п	x	y	$\hat{y} = 3{,}73 + 0{,}53x$	$y - \hat{y}$	$(y-\hat{y})^2$
1	1,5	5,0	3,73 + 053·1,5 = 4,53	0,47	0,2209
2	4,0	4,5	3,73 + 0,53·4,0 = 5,85	- 1,35	1,8225
3	5,0	7,0	3,73 + 0,53·5,0 = 6,38	0,62	0,3844
4	7,0	6,5	3,73 + 0,53·7,0 = 7,44	- 0,94	0,8836
5	8,5	9,5	3,73 + 0,53·8,5 = 8,24	1,26	1,5876
6	10,0	9,0	3,73 + 0,53·10,0 = 9,03	- 0,03	0,0009
7	11,0	11,0	3,73 + 0,53·11,0 = 9,56	1,44	2,0736
8	12,5	9,0	3,73 + 0,53·12,5 = 10,35	- 1,35	1,8225
Σ	59,5	61,5		0,12	8,8

Вычисляем общую и остаточную дисперсии

$$\bar{S}_y^2 = \frac{Q_y}{n-1} = \frac{\sum y^2 - \frac{1}{n}\left(\sum y\right)^2}{n-1} = \frac{509{,}25 - \frac{1}{8}61{,}5^2}{7} = 5{,}28;$$

$$\bar{S}_{yост}^2 = \frac{\sum (y-\hat{y})^2}{n-2} = \frac{8{,}8}{6} = 1{,}46.$$

Расчетное значение критерия Фишера

$$F = \frac{\bar{S}_y^2}{\bar{S}_{yocm}^2} = \frac{5,28}{1,46} = 3,62.$$

Критическое значение критерия Фишера определяем по табл. П. 6 при $\nu_1 = n - 1 = 7$, $\nu_2 = n - 2 = 6$ и р = 5% $F^m_{(7,6,5\%)} = 4,2066$

$$F = 3,62 < F^m_{(7,6,5\%)} = 4,2066$$

Следовательно, при 5%-ном уровне значимости полученное уравнение регрессии неадекватно опытным данным.

Проверяем адекватность уравнения при 10%-ном уровне значимости

$$F = 3,62 > F^m_{(7,6,10\%)} = 3,0145.$$

Следовательно, при 10%-ном уровне значимости уравнение регрессии статистически значимо описывает результаты экспериментов.

2.4. Нелинейная регрессия

Оценку линейности регрессии можно выполнить только в том случае, если общее число значений *y* больше, чем число значений *x*. Каждому значению x_i соответствует n_i значений *y*. На практике при проведении измерений или наблюдений так чаще всего и бывает.

Если статистика

$$\hat{F} = \frac{\frac{1}{k-2}\sum_{i=1}^{k} n_i\left(\bar{y}_i - \hat{y}_i\right)^2}{\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_i}\left(y_{ij} - \bar{y}\right)^2}, \tag{2.27}$$

т.е. сумма отклонений групповых средних от прямой регрессии, деленная на сумму отклонений значений *y* от групповых средних со степенями свободы в числителе $\nu_1 = k - 2$ и в знаменателе $\nu_2 = n - k$, достигает или превосходит границу значимости, то гипотезу о линейности нужно отбросить.

В том случае, когда гипотеза линейности может быть отброшена или когда при графическом изображении точек нелинейность явно просматривается «на глаз», есть смысл получить по экспериментальным данным нелинейную формулу парной зависимости (квадратичную или высших порядков). При этом можно рассчитывать, что нелинейная формула даст меньшую остаточную дисперсию $S^2_{ост.}$, т.е. лучше предскажет результаты опытов. Следует только помнить, что речь идет о зависимости, нелинейной по фактору *x*. По параметрам зависимость останется линейной.

Для того чтобы отличить квадратичную парную регрессию от множественной, которая будет рассмотрена ниже, целесообразно изменить принятую ранее систему обозначений коэффициентов регрессии. С учетом этой оговорки формулу парной квадратичной регрессии можно представить в виде

$$y = a + bx + cx^2. \qquad (2.28)$$

Аналогично запишем формулу кубичной регрессии:

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3. \qquad (2.29)$$

Однако надо иметь в виду, что уже парный регрессионный анализ третьего порядка (кубичная регрессия) трудно выполнить вручную.

При наличии в распоряжении исследователя компьютера теоретически можно получить формулу парной зависимости любого порядка, однако с некоторого момента при повышении порядка уравнения регрессии остаточная дисперсия вместо того, чтобы уменьшаться, может увеличиваться. Это, как правило, и является условием прекращения счета.

Коэффициенты квадратичного уравнения *a, b, c* можно найти, решая следующую систему трех нормальных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} an + b\sum x + c\sum x^2 &= \sum y, \\ a\sum x + b\sum x^2 + c\sum x^3 &= \sum xy, \\ a\sum x^2 + b\sum x^3 + c\sum x^4 &= \sum x^2 y. \end{aligned} \qquad (2.30)$$

Можно написать аналогичную систему уравнений для получения уравнения парной зависимости любого порядка. Например, для определения коэффициентов кубичной парной регрессии методом экстраполяции получаем систему нормальных уравнений вида

$$\begin{aligned} an + b\sum x + c\sum x^2 + d\sum x^3 &= \sum y, \\ a\sum x + b\sum x^2 + c\sum x^3 + d\sum x^4 &= \sum xy, \\ a\sum x^2 + b\sum x^3 + c\sum x^4 + d\sum x^5 &= \sum x^2 y, \\ a\sum x^3 + b\sum x^4 + c\sum x^5 + d\sum x^6 &= \sum x^3 y. \end{aligned} \qquad (2.31)$$

и т. д. для уравнения регрессии любого порядка.

Пример 11. Построить уравнение квадратичной регрессии по данным (результатам наблюдений) приведенным в табл. 13.

Таблица 13

Исходные данные для решения примера по парной квадратичной регрессии

x	1,7	3,4	4,0	4,1	5,3
y	25	34	57	82	98

Построить квадратичную парную зависимость - это значит найти коэффициенты *a, b* и *c* системы уравнений (2.30).

Предварительно вычисляем суммы в табличной форме (табл. 14).

Таблица 14

Суммы, необходимые для вычисления коэффициентов a, b и c

№ п/п	x	y	xy	x^2	x^2y	x^3	x^4
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	1,7	25	42,5	2,89	72,25	4,91	8,35
2	3,4	34	115,6	11,56	393,04	39,30	133,62
3	4	57	228,0	16,00	912,00	64,00	256,00
4	4,1	82	336,2	16,81	1378,42	68,92	282,57
5	5,3	98	519,4	28,09	2752,12	148,88	789,06
Σ	18,5	296	1241,7	75,35	5508,53	326,01	1469,60

Взятые из табл. 14 значения сумм подставляем в нормальные уравнения (2.30):

$$5a + 18.5b + 75{,}35c = 296, \quad (1)$$

$$18{,}5a + 75{,}35b + 326{,}01c = 1241{,}7, \quad (2)$$

$$75{,}35a + 326{,}01b + 1469{,}6c = 5508{,}53. \quad (3)$$

Затем следует довольно сложная процедура решения системы алгебраических уравнений, которую нужно выполнять очень внимательно, так как можно допустить ошибку, обнаружить которую можно только полным повторением расчета (в этом и состоит недостаток метода построения квадратичных полиномов).

Система решаем методом исключения переменных. Все члены первого уравнения умножаем на 3,7:

18,50a + 68,45b + 278,80c = 1095,20,

18,50a + 75,356 + 326,01c = 1241,70,

6,90b + 47,21c = 146,5. (4)

Далее исключаем *a* из уравнений (2) и (3). Для этого умножим все члены уравнения (3) на 4,073;

18,50a + 75,35b + 326,01c = 1241,70, |x4,073

75,35a + 326,01b + 1469,60c = 5508,53,

75,35a + 306,90b + 1327,84c = 5057,44,

75,35a + 326,01b + 1469,60c = 5508,33,

19,11b+141,76c = 451,09. (5)

Из уравнений (4) и (5) исключаем *b* и определяем *c*:

6,90b + 47,21c = 146,5, | x 2,77,

19,11b +141,76c = 451,09,

19,11b+130,77c = 405,81,

19,11b+141,76c = 451,09,

10,99c = 45,28,

c = 4,1200;

19,11b + 141,76 • 4,12 = 451,09, 19,11b = -132,96,

b = - 6,9576;

5,00a - 18,50 • 6,9576 + 75,35 • 4,1200 = 296,

5,00a +181,72 = 296, a =22,856.

Для проверки найденные значения коэффициентов подставляются в одно из исходных уравнений:

18,50 • 22,8560 - 75,35 • 6,9576 + 326,01 • 4,1200 = 1241,70;

1241,70=1241,70.

Проверяем адекватность полученного квадратичного уравнения регрессии

Таблица 15

Вычисление остаточной дисперсии и дисперсии у

№п/п	у	$\hat{y}$	$\lvert y-\hat{y}\rvert$	$(y-\hat{y})^2$	$\lvert y-\bar{y}\rvert$	$(y-\bar{y})^2$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	25	22,935	2,065	4,264	34,2	1169,64
2	34	46,827	12,827	164,532	25,2	635,04
3	57	60,946	3,946	15,571	2,2	4,84
4	82	63,587	18,413	339,039	22,8	519,84
5	98	101,712	3,712	13,779	38,8	1505,44
Σ	296			537,185		3834,8

$\bar{y}$ =59,2

Окончательно получаем квадратичное уравнение

$y = 22,8560 - 6,9576x + 4,1200x^2$.

Вычисляем предсказанные значения у:

$y_1 = 22,8560 - 6,9576 \cdot 1,7 + 4,1200 \cdot 2,89 = 22,935$,

$y_2 = 22,8560 - 6,9576 \cdot 3,4 + 4,1200 \cdot 11,56 = 46,827$,

$y_3 = 22,8560 - 6,9576 \cdot 4 + 4,1200 \cdot 16 = 60,946$,

$y_4 = 22,8560 - 6,9576 \cdot 4,1 + 4,1200 \cdot 16,81 = 63,587$,

$y_5 = 22,8560 - 6,9576 \cdot 5,3 + 4,1200 \cdot 28,09 = 101,712$.

Процедура вычисления остаточной дисперсии дана в табл. 15:

$S^2_{ост}$ = 537, 185/3 = 179,062, S^2_y = 3834,8/4 = 958,7,

F = 958,7/179,062 = 5,35 > $F^т$ = 5,3427

Полученное уравнение адекватно опытным данным при 10% уровне значимости и предсказывает результаты опытов в 5,34 раза лучше среднего у.

Используя метод наименьших квадратов, можно построить практически любые формы нелинейной парной связи. Для этого используют линеаризующие преобразования, так как только линейные по параметрам функции восстанавливаются методом наименьших квадратов.

2.5. Множественная регрессия

При анализе результатов научных исследований часто имеет место ситуация, когда количественное изменение изучаемого процесса зависит не от одной, а от нескольких переменных. При проведении экспериментов в такой ситуации исследователь записывает показания приборов, регистрирующих значение выходного параметра *y* и всех переменных x_i, от которых он зависит.

Задача множественного регрессионного анализа состоит в построении такого уравнения плоскости в (k + 1)-мерном пространстве (k – число переменных), отклонения результатов наблюдений y_i, от которой были бы минимальные. Другими словами, следует вычислить значения коэффициентов b_0, b_i в линейном полиноме

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i \tag{2.32}$$

минимизирующие выражение

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \left(b_0 + b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2} + b_3 x_{i3} + ... + b_p x_{ip} \right) \right]^2, \tag{2.33}$$

где $\hat{y}_i$ - вычисляемые значения исследуемой характеристики.

Для отыскания минимума выражения (2.33) необходимо найти частные производные по всем неизвестным b_0, b_1, b_2, b_3, …, b_p и приравнять их нулю. Полученные уравнения образуют систему нормальных уравнений:

$$\begin{gathered} nb_0 + b_1 \sum x_{i1} + b_2 \sum x_{i2} + ... + b_p \sum x_{ip} = \sum y_i \,, \\ b_0 \sum x_{i1} + b_1 \sum x_{i1}^2 + b_2 \sum x_{i1} x_{i2} + ... + b_p \sum x_{i1} x_{ip} = \sum y_i x_{i1} \,, \\ b_0 \sum x_{i2} + b_1 \sum x_{i1} x_{i2} + b_2 \sum x_{i2}^2 + ... + b_p \sum x_{i2} x_{ip} = \sum y_i x_{i2} \,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_0 \sum x_{ip} + b_1 \sum x_{i1} x_{ip} + b_2 \sum x_{i2} x_{ip} + ... + b_p \sum x_{ip}^2 = \sum y_i x_{ip} \,. \end{gathered} \tag{2.34}$$

В результате решения системы нормальных уравнений (2.34) получаем полином первой степени (2.32) с известными коэффициентами b_0, b_i.

Пример 12. Построить уравнение регрессии по следующим исходным данным.

Таблица 16

Исходные данные для решения примера по множественной регрессии

x_1	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
x_2	5	4	3	2	1	1	2	3	4	5
y	6	10	14	18	22	12	13	16	17	18

Уравнение регрессии для двухфакторной линейной зависимости будет иметь вид

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2.$$

Система нормальных уравнений для определения коэффициентов b_0, b_1 и b_2

$$\begin{gathered} nb_0 + b_1 \Sigma x_1 + b_2 \Sigma x_2 = \Sigma y \\ b_0 \Sigma x_1 + b_1 \Sigma x_1^2 + b_2 \Sigma x_1 x_2 = \Sigma x_1 y \\ b_0 \Sigma x_2 + b_1 \Sigma x_1 x_2 + b_2 \Sigma x_2^2 = \Sigma x_2 y \end{gathered}$$

Предварительно вычисляем суммы в табличной форме (табл. 17).

Таблица 17

Суммы, необходимые для вычисления коэффициентов b_0, b_1 и b_2

№ п/п	x_1	x_2	y	x_1^2	x_2^2	x_1x_2	x_1y	x_2y
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	1	5	6	1	25	5	6	30
2	2	4	10	4	16	8	20	40
3	3	3	14	9	9	9	42	42
4	4	2	18	16	4	8	72	36
5	5	1	22	25	1	5	110	22
6	1	1	12	1	1	1	12	12
7	2	2	13	4	4	4	26	26
8	3	3	16	9	9	9	48	48
9	4	4	17	16	16	16	68	68
10	5	5	18	25	25	25	90	90
Σ	30	30	146	110	110	90	494	414

Подставляем полученные суммы в систему нормальных уравнений

$$10b_0 + 30b_1 + 30b_2 = 146|x3, \qquad (1)$$
$$30b_0 + 110b_1 + 90b_2 = 494, \qquad (2)$$
$$30b_0 + 90b_1 + 110b_2 = 414. \qquad (3)$$

Систему решаем методом исключения переменных. Все члены первого уравнения умножаем на 3 и вычитаем из второго уравнения первое:

$$30b_0 + 110b_1 + 90b_2 = 494$$
$$\underline{30b_0 + 90b_1 + 90b_2 = 438}$$
$$20b_1 = 56$$
$$b_1 = 2{,}8$$

Далее исключаем b_0 из уравнений (2) и (3) и определяем b_2.

$$30b_0 + 110b_1 + 90b_2 = 494$$
$$\underline{30b_0 + 90b_1 + 110b_2 = 414}$$
$$20b_1 - 20b_2 = 80$$
$$20*2{,}8 – 20b_2 = 80$$
$$56 – 20b_2 = 80$$
$$20b_2 = 56 – 80 = - 24$$
$$b_2 = - 1{,}2$$

Из уравнения (1) определяем b_0:

$$10b_0 + 30*2{,}8 + 30*(-1{,}2) = 146$$
$$10b_0 = 146 – 84 + 36 = 98$$
$$b_0 = 9{,}8$$

Для проверки найденные значения коэффициентов подставляем в одно из исходных уравнений:

$30*9{,}8 + 90*2{,}8 +110*(-1{,}2) = 414;$

$414 = 414.$

Таблица 18

Вычисление остаточной дисперсии и дисперсии у

№п/п	x_1	x_2	y	$\hat{y}$	$y-\hat{y}$	$(y-\hat{y})^2$	$(y-\bar{y})$	$(y-\bar{y})^2$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9
1	1	5	6	6,6	-0,6	0,36	-8,6	73,96
2	2	4	10	10,6	-0,6	0,36	-4,6	21,16
3	3	3	14	14,6	-0,6	0,36	-0,6	0,36
4	4	2	18	18,6	-0,6	0,36	3,4	11,56
5	5	1	22	22,6	-0,6	0,36	7,4	54,76
6	1	1	12	11,4	0,6	0,36	-2,6	6,76
7	2	2	13	13	0	0	-1,6	2,56
8	3	3	16	14,6	1,4	1,96	1,4	1,96
9	4	4	17	16,2	0,8	0,64	2,4	5,76
10	5	5	18	17,8	0,2	0,04	3,4	11,56
Σ	30	30	146		0	4,8	0	190,4

$\bar{y} = 14,6$

Окончательно получаем линейное уравнение вида

$y = 9,8 + 2,8x_1 - 1,2x_2$.

Вычисляем предсказанные значения у:

$y_1 = 9,8 + 2,8 \cdot 1 - 1,2 \cdot 5 = 6,6$,

$y_2 = 9,8 + 2,8 \cdot 2 - 1,2 \cdot 4 = 10,6$,

$y_3 = 9,8 + 2,8 \cdot 3 - 1,2 \cdot 3 = 14,6$,

$y_4 = 9,8 + 2,8 \cdot 4 - 1,2 \cdot 2 = 18,6$,

$y_5 = 9,8 + 2,8 \cdot 5 - 1,2 \cdot 1 = 22,6$,

$y_6 = 9,8 + 2,8 \cdot 1 - 1,2 \cdot 1 = 11,4$,

$y_7 = 9,8 + 2,8 \cdot 2 - 1,2 \cdot 2 = 13,0$,

$y_8 = 9,8 + 2,8 \cdot 3 - 1,2 \cdot 3 = 14,6$,

$y_9 = 9,8 + 2,8 \cdot 4 - 1,2 \cdot 4 = 16,2$,

$y_{10} = 9,8 + 2,8 \cdot 5 - 1,2 \cdot 5 = 17,8$.

Процедура вычисления остаточной дисперсии дана в табл. 18.

$S^2_{ост} = 4,8/(10 - 2 - 1) = 0,686$, $S^2_y = 190,4/9 = 21,15$,

$F = 21,15/0,686 = 30,8 > F^т = 3,6767$.

Критическое значение критерия Фишера определяем при р = 5% и числах степеней свободы $\nu_1 = n - 1 = 9$ и $\nu_2 = n - k - 1 = 10 - 2 - 1 = 7$

Полученное уравнение адекватно опытным данным при 5% уровне значимости.

3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПЛАНИРОВАНИЯ ФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

3.1. Применение метода планирования эксперимента при исследовании технологических процессов

При выполнении различного рода исследований встречаются в основном два типа задач – интерполяционная и оптимизационная. В интерполяционной задаче находят зависимость выходного параметра, т.е. функции отклика от влияющих на него факторов. В оптимизационной задаче определяются такие значения факторов, при которых функция отклика принимает экстремальное значение (минимум или максимум). В этом случае функция отклика называется параметром оптимизации. Применение математических методов планирования позволяет значительно сократить объем экспериментов при проведении исследований, как первого так и второго вида.

Экспериментальные исследования с применением метода планирования эксперимента выполняются по следующей схеме. По результатам предварительных исследований задаются моделью процесса в виде линейного уравнения регрессии

$$y = b_0 + \sum b_i x_i + \sum b_{ij} x_i x_j \,. \qquad (3.1)$$

Для определения коэффициентов уравнения регрессии составляется матрица планирования ПФЭ 2^k или ДФЭ 2^{k-p}, по которой проводятся опыты.

Матрица планирования и результаты измерений заносятся в таблицу 19.

Таблица 19

Матрица планирования и результаты измерений

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_k	y	$\bar{y}$	S^2
1	+1	+1	-1	…+1	$y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1m}$	y_1	S^2_1
2	+1	-1	-1	…+1	$y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2m}$	y_2	S^2_2
3	+1	+1	+1	…+1	$y_{31}, y_{32}, \ldots, y_{3m}$	y_3	S^2_3
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
N	+1	-1	+1	…-1	$y_{N1}, y_{N2}, \ldots, y_{Nm}$	y_N	S^2_N

В каждой строчке матрицы планирования определяется среднее значение измеряемой величины по m параллельным опытам

$$\bar{y}_i = \sum y_{iu}/m \qquad (3.2)$$

и дисперсия

$$S^2_i = \sum (y_{iu} - \bar{y}_i)^2/(m-1).$$

Проверяется однородность выборочных дисперсий по критерию Кохрена. Для этого составляется отношение максимальной дисперсии к сумме всех дисперсий

$$G = S^2_{max}/\sum S^2_i. \qquad (3.3)$$

Полученное отношение сравнивается с табличным /П. 7/ $G_{(1-p,\, f1,\, f2)}$, где $p = 0{,}05$; $f_1 = m - 1$; $f_2 = N$. Если $G < G_{(1-p,\, f1,\, f2)}$, дисперсии однородны. Тогда в качестве оценки для дисперсии воспроизводимости можно взять среднюю дисперсию

$$S^2_{воспр.} = \sum S^2_i/N \qquad (3.4)$$

с числом степеней свободы $f_{воспр.} = N(m-1)$.

Коэффициенты уравнения регрессии определяются по формуле

$$b_j = \sum x_{ji}y_i/N. \qquad (3.5)$$

Учитывая, что дисперсия y, полученного по выборке объема m, в m раз меньше дисперсии единичного измерения

$$S^2_y = S^2_{воспр.}/m$$

дисперсию коэффициентов S^2_{bj} можно определить следующим образом

$$S^2_{bj} = S^2_{воспр.}/Nm. \qquad (3.6)$$

Значимость коэффициентов проверяется по критерию Стьюдента. Для всех коэффициентов уравнения регрессии составляется t-отношение

$$t_j = |b_j|/S_{bj}, \qquad (3.7)$$

которое сравнивают с табличным $t_{(1-p,\, f)}$ для уровня значимости $p = 0{,}05$ и числа степеней свободы $f = N(m-1)$. Если $t_j < t_{(1-p,\, f)}$, то принимается гипотеза равенства нулю генерального коэффициента регрессии, а соответствующий выборочный коэффициент b_j отсеивается как незначимый из уравнения регрессии. При этом остальные коэффициенты не пересчитываются.

Адекватность уравнения регрессии эксперименту проверяется по критерию Фишера. Для проверки адекватности составляется дисперсионное отношение

$$F = S^2_{ад}/S^2_{воспр.}, \qquad (3.8)$$

где $S^2_{ад.}$ – дисперсия адекватности, которая определяется по формуле

$$S^2_{ад.} = m\sum(y_i - y_i)^2/(N-l), \qquad (3.9)$$

где l – число значимых коэффициентов в уравнении регрессии.

Если полученное дисперсионное отношение оказывается меньше табличного

$$F < F_{(1-p,\, v1,\, v2)}, \qquad (3.10)$$

где p – уровень значимости; $v_1 = N - l$ – число степеней свободы дисперсии адекватности; $v_2 = N(m-1)$ – число степеней свободы дисперсии воспроизводимости, уравнение адекватно эксперименту.

В противном случае для адекватного описания эксперимента необходимо увеличить порядок аппроксимирующего полинома.

Пример 13. Изучалось влияние условий пастеризации и добавок к молоку на его структурно-механические характеристики. В качестве независимых факторов были выбраны: X_1 – температура пастеризации, °С; X_2 – время выдержки при температуре пастеризации, с; X_3 – содержание в молоке цитрата натрия, кг/м^3; X_4 - содержание хлорида кальция, кг/м^3; X_5 – содержание фосфата натрия, кг/м^3; X_6 - содержание сахарата кальция, кг/м^3; X_7 – содержание в молоке перекиси водорода, кг/м^3. В качестве отклика измерялась динамическая вязкость молока при температуре 20°С, в Па с.

Условия эксперимента приведены в табл. 20.

Таблица 20

Условия проведения опытов

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
Основной уровень, X^0_i	76,5	300	1,0	0,22	1,5	1,53	1,5
Интервал варьирования, ΔX_i	13,5	300	1,0	0,22	1,5	1,53	1,5
Нижний уровень, $X_{iн}$ (-1)	63	0	0	0	0	0	0
Верхний уровень, $X_{iв}$ (+1)	90	600	2,0	0,44	3,0	3,06	3,0
Кодированное обозначение фактора, x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7

В качестве исходной модели было принято линейное уравнение регрессии вида

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5 + b_6x_6 + b_7x_7.$$

Для определения коэффициентов модели была использована 1/16 реплика ПФЭ 2^7 (ДФЭ 2^{7-4}) со следующей заменой взаимодействий факторов на факторы x_4, x_5, x_6, x_7

$$x_1x_2x_3 = x_4,\ x_1x_2 = x_5,\ x_6 = x_1x_3,\ x_7 = x_2x_3.$$

Каждый опыт в матрице планирования повторен два раза (см. табл. 21)

Средние значения вязкости получены по двум измерениям. Проверим однородность дисперсий по критерию Кохрена. Сумма дисперсий равна

$$\sum S^2_i = 125{,}2\cdot10^{-11}.$$

Критерий Кохрена

$$G = S^2_{max}/\sum S^2_i = 45{,}0\cdot10^{-11}/125{,}2\cdot10^{-11} = 0{,}359$$

Табличное значение критерия Кохрена (табл. П.7) для уровня значимости $p = 0{,}05$ и чисел степеней свободы $f_1 = 1$ и $f_2 = 8$ $G_{кр} = 0{,}6798$.

$G < G_{кр}$, следовательно, дисперсии однородны.

Дисперсия воспроизводимости определяется в связи с этим как средне арифметическfя

$$S^2_{воспр} = \sum S^2_i /N = 125{,}2\cdot10^{-11}/8 = 15{,}65\cdot10^{-11}.$$

Число степеней свободы дисперсии воспроизводимости равно

$$f_{воспр} = N(m - 1) = 8(2 - 1) = 8$$

Коэффициенты уравнения регрессии определяем по формуле

$$b_i = \sum x_iy_i/N.$$

Коэффициенты будут равны

$$b_0 = 1{,}8272\bullet10^{-3};\ b_1 = 0{,}002\bullet10^{-3};\ b_2 = 0{,}006\bullet10^{-3};\ b_3 = 0{,}01725\bullet10^{-3};$$
$$b_4 = 0{,}00675\bullet10^{-3};\ b_5 = 0{,}01725\bullet10^{-3};\ b_6 = 0{,}027\bullet10^{-3};\ b_7 = 0{,}0035\bullet10^{-3}.$$

Оценим значимость коэффициентов по критерию Стьюдента. Для этого определим ошибку коэффициента

Таблица 21

Обработка результатов опытов при планировании эксперимента

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$y_1 10^{-3}$	$y_2 10^{-3}$	$\overline{y}\ 10^{-3}$	$S^2 10^{-11}$	$\widehat{y}\ 10^{-3}$	$\left(\overline{y}-\widehat{y}\right)\cdot 10^{-11}$
1	+	-	-	-	-	+	+	+	1,836	1,850	1,843	9,8	1,84145	0,24
2	+	+	-	-	+	-	-	+	1,764	1,780	1,772	12,8	1,76645	3,08
3	+	-	+	-	+	-	+	-	1,830	1,824	1,827	1,8	1,83245	2,97
4	+	+	+	-	-	+	-	-	1,800	1,796	1,798	0,8	1,79945	0,21
5	+	-	-	+	+	+	-	-	1,843	1,817	1,830	33,8	1,83545	2,97
6	+	+	-	+	-	-	+	-	1,825	1,855	1,840	45,0	1,84145	0,21
7	+	-	+	+	-	-	-	+	1,792	1,810	1,801	16,2	1,79945	0,24
8	+	+	+	+	+	+	+	+	1,912	1,902	1,907	5,0	1,90145	3,08

$$S_{bi} = \sqrt{\frac{15,65 \cdot 10^{-11}}{2 \cdot 8}} = 0,31 \cdot 10^{-5}$$

и составим t-отношение для всех коэффициентов уравнения регрессии

$t_0 = 1,8272 \cdot 10^{-3} / 0,31 \cdot 10^{-5} = 589,4$; $t_1 = 0,002 \cdot 10^{-3} / 0,31 \cdot 10^{-5} = 0,645$;

$t_2 = 0,006 \cdot 10^{-3} / 0,31 \cdot 10^{-5} = 1,935$; $t_3 = 0,01725 \cdot 10^{-3} / 0,31 \cdot 10^{-5} = 5,564$;

$t_4 = 0,00675 \cdot 10^{-3} / 0,31 \cdot 10^{-5} = 2,177$; $t_5 = 0,01725 \cdot 10^{-3} / 0,31 \cdot 10^{-5} = 5,564$;

$t_6 = 0,027 \cdot 10^{-3} / 0,31 \cdot 10^{-5} = 8,710$; $t_7 = 0,0035 \cdot 10^{-3} / 0,31 \cdot 10^{-5} = 1,129$.

Табличное значение критерия Стьюдента $t_{(0.05;\ 8)} = 1,8595$ /П. 2/. Коэффициенты b_1 и b_7 незначимы, так как составленные для них t-отношения меньше табличного. После исключения незначимых коэффициентов уравнение регрессии примет вид

$$y = (1,8272 + 0,006x_2 + 0,01725x_3 + 0,00675x_4 + 0,01725x_5 + 0,027x_6) \cdot 10^{-3}$$

Проверим адекватность этого уравнения по критерию Фишера. Определим дисперсию адекватности

$$S^2_{ад} = 2\sum(y_i - y_i)^2/(N - l) = 2 \cdot 13,0 \cdot 10^{-11}/(8 - 6) = 13,0 \cdot 10^{-11}.$$

Тогда F-отношение равно

$$F = S^2_{ад} / S^2_{воспр.} = 13,0 \cdot 10^{-11}/15,65 \cdot 10^{-11} = 0,831.$$

Если

$$F < F_{1-p}(f_1, f_2),$$

где p – уровень значимости; $\nu_1 = (N - l)$ – число степеней свободы дисперсии адекватности (l – число значимых коэффициентов в уравнении регрессии); $\nu_2 = N(m - 1)$ – число степеней свободы дисперсии воспроизводимости (m – число параллельных опытов), то уравнение адекватно эксперименту.

Табличное значение критерия Фишера для $p = 0,05$, $\nu_1 = 2$ и $\nu_2 = 8$ $F_{0.95}(4;\ 8) = 4,4590$. $F < F_{0.95}(4;\ 8)$ – уравнение регрессии адекватно эксперименту.

Анализ уравнения регрессии показывает, что наиболее значительное влияние на вязкость молока оказывает содержание в нем соли сахарата кальция, вторыми по значимости являются соли – цитрат натрия и фосфат натрия, содержание которых оказывает одинаковое влияние на вязкость молока, и, наконец, последними по значимости являются хлорид кальция и время выдержки. Все эти факторы вызывают увеличение вязкости молока, т. к. коэффициенты в уравнении имеют знаки «плюс». Влияние остальных факторов оказывает незначительное влияние на изменение вязкости молока и ими можно пренебречь.

3.2. Оптимизация методом крутого восхождения

Модель, в виде линейного уравнения регрессии, в произвольной области эксперимента ω_1, принадлежащей области исследования Ω, строится на основе ПФЭ 2^k или ДФЭ 2^{k-p}

$$\hat{y}^1 = b_0^1 + b_1^1 x_1 + b_2^1 x_2, \qquad (3.11)$$

где верхний индекс 1 означает, что оно относится к области ω_1.

Если она адекватна, то по полученному уравнению регрессии определяется направление градиента ∇_1 в центре плана O_1. Например, из уравнения (3.11) следует

$$\left(\frac{\partial \hat{y}^1}{\partial x_1}\right)_{O_1} i + \left(\frac{\partial \hat{y}^1}{\partial x_2}\right)_{O_1} j = b_1^1 i + b_2^1 j, \tag{3.12}$$

где частные производные вычисляются для центра плана O_1, где $x_{10} = x_{20} = \ldots = x_{k0} = 0$, поэтому координатами градиента в кодированной системе координат являются b-коэффициенты линейной модели.

На рис. 3, *а* показана геометрическая интерпретация уравнения регрессии $y^1 = 6 - 2x_1 - x_2$ в пространстве y, x_1, x_2. На рис. 3, *б* изображены линии равного уровня и направление градиента в двухфакторном пространстве Ox_1x_2.

Движение по градиенту совершается изменением координат пропорционально коэффициентам b_i

$$\Delta X_i = mb_i,\ i=1, 2, \ldots k, \tag{3.13}$$

где b_i – коэффициенты при линейных членах уравнения регрессии, $b_i = \partial y/\partial x_i$, m – коэффициент пропорциональности; k – количество факторов.

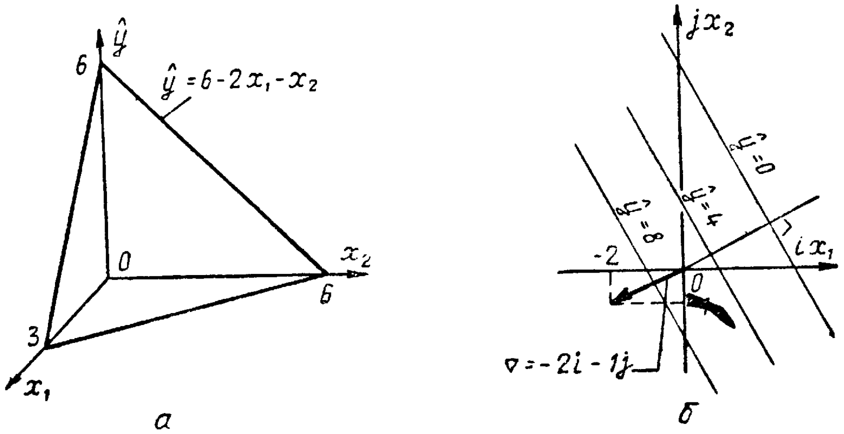


Рис. 3. Интерпретация поверхностного отклика $y(x_1, x_2)$ — линий равного уровня y = const (а) и градиента ∇_1 (б)

В процессе эксперимента кодированные переменные изменяются только варьированием переменных X_i. Связь между приращениями кодированных Δx_i и физических ΔX_i переменных можно установить с помощью уравнения кодирования, из которого находим

$$\Delta x_i = \Delta X_i / h_i. \tag{3.14}$$

Из уравнений (3.13), (3.14) получаем соотношение

$$\Delta X_i = mh_i b_i,\ i = 1, 2, \ldots, k, \tag{3.15}$$

т.е. для движения по градиенту приращение любой физической переменной должно быть пропорционально произведению интервала варьирования h_i на коэффициент b_i линейного эффекта x_i.

На рис. 4 показано сечение поверхности отклика, вертикальной плоскостью, проходящей через вектор градиента ∇_1. При движении по градиенту в направлении точки O_2 значения отклика измеряются или вычисляются по уравнению регрессии. В начале движения в точках O_1, *1*, *2* определяются значения координат, а опыты не проводятся. Такие опыты называют *мысленными*. Затем устанавливаются требуемые значения факторов и измеряется отклик. Такие опыты называют *реализованными*. Мысленные и реализованные опыты могут чередоваться. Затраты труда и времени на выход в точку O_2 (рис. 4) зависят от размера шага d, который следует выбирать так, чтобы, с одной стороны, число шагов было не очень большим и, с другой — чтобы движение по градиенту ∇_1 заканчивалось по возможности ближе к точке O_2. Движение по направлению ∇_1 останавливается, когда значения отклика начинают уменьшаться. На рис. 4 это имеет место в точке *3*, так как $y_4 < y_3$.

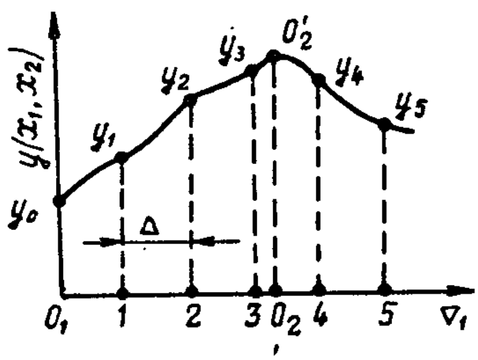


Рис. 4. Сечение поверхности отклика вертикальной плоскостью, проходящей через вектор градиента ∇_1.

Пример 14. Рассмотрим оптимизацию технологического процесса, целью которой был подбор такого содержания компонентов производимого продукта, чтобы его плотность была максимальной.

В ходе предварительного эксперимента было установлено, что наибольшее влияние на отклик (плотность продукта) из всех факторов оказывает содержание компонентов А и В (кг/м^3), которые приняты за факторы X_1 и X_2. Поэтому оптимизации подлежит величина плотности как функция от содержания компонентов А и В.

В качестве исходной была выбрана точка, в которой содержание компонентов А и В X_{10} = 5,5 кг/м^3; X_{20} = 2,3 кг/м^3 (на основании предварительных исследований).

Условия эксперимента и данные кодирования факторов представлены в табл.22.

Таблица 22

Условия эксперимента

Величина	Факторы	
	X_1, кг/м^3	X_2, кг/м^3
Основной уровень, X_{i0}	5,5	2,3
Интервал варьирования, ΔX_i	0,3	0,2
Нижний уровень, $X_{iн}$	5,2	2,1
Верхний уровень, $X_{iв}$	5,8	2,5
Кодированное обозначение фактора	x_1	x_2

В исходной точке был реализован ПФЭ 2^2, матрица планирования и результаты которого приведены в табл. 23. Отклик в опытах измерялся два раза.

Уравнение регрессии было задано моделью вида

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 .$$

Коэффициенты модели были рассчитаны по формуле $b_i = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} x_i \bar{y}_i}{N}$

$$b_0 = \frac{580 + 620 + 640 + 690}{4} = 632{,}5\,,$$

$$b_1 = \frac{-580 + 620 - 640 + 690}{4} = 22{,}5\,,$$

$$b_2 = \frac{-580 - 620 + 640 + 690}{4} = 32{,}5\,,$$

$$b_{12} = \frac{580 - 620 - 640 + 690}{4} = 2{,}5.$$

Таблица 23

План и результаты ПФЭ 2^2

Номер набора u	x_{1u}	x_{2u}	y_1	y_2	$\bar{y}$
1	-	-	590	570	580
2	+	-	610	630	620
3	-	+	630	650	640
4	+	+	700	680	690

Вычисляем построчные дисперсии

$$S^2_i = \sum(y_{iu} - \bar{y}_i)^2/(m - 1).$$

$$S_1^2 = 200\,; S_2^2 = 200\,; S_3^2 = 200\,; S_4^2 = 200$$

Все дисперсии одинаковы, следовательно, дисперсия воспроизводимости равна $S^2_{воспр} = 200$.

Учитывая, что дисперсия y, полученного по выборке объема m, в m раз меньше дисперсии единичного измерения

$$S^2_y = S^2_{воспр.}/m,$$

дисперсию коэффициентов S^2_{bj} можно определить следующим образом

$$S^2_{bj} = S^2_{воспр.}/Nm.$$

$$S^2_{bi} = \frac{200}{4 \cdot 2} = 25$$

Значимость коэффициентов проверяется по критерию Стьюдента. Для всех коэффициентов уравнения регрессии составляются t-отношения

$$t_j = |b_j|/S_{bj},$$

$$t_0 = 632{,}5/5 = 126{,}5;\ t_1 = 22{,}5/5 = 4{,}5;\ t_2 = 32{,}5/5 = 6{,}5;\ t_{12} = 2{,}5/5 = 0{,}5,$$

которые сравниваются с табличным $t_{(1 - p,\ \nu)}$ для уровня значимости p = 0,05 и числа степеней свободы $\nu = N(m - 1) = 4$. Если $t_j < t_{(1 - p,\ f)}$, то принимается гипотеза равенства нулю генерального коэффициента регрессии, а соответствующий выборочный коэффициент b_j отсеивается как незначимый из уравнения регрессии. При этом остальные коэффициенты не пересчитываются.

$$t_{12} < t_{(5;\ 4)} = 2{,}1318,$$

следовательно, коэффициент b_{12} должен быть исключен из уравнения.

Уравнение регрессии имеет вид

$$\hat{y} = 632{,}5 + 22{,}5x_1 + 32{,}5x_2;$$

Проверим адекватность уравнения по критерию Фишера. Для проверки адекватности составим дисперсионное отношение

$$F = S^2_{ад}/S^2_{воспр.},$$

где $S^2_{ад.}$ – дисперсия адекватности, которая определяется по формуле

$$S^2_{ад.} = m\sum(y_i - y_i)^2/(N - l),$$

где l – число значимых коэффициентов в уравнении регрессии.

Таблица 24

Вычисление остаточной дисперсии

$\bar{y}$	$\hat{y}$	$\bar{y} - \hat{y}$	$(\bar{y} - \hat{y})^2$
580	577,5	2,5	6,25
620	622,5	-2,5	6,25
640	642,5	-2,5	6,25
690	687,5	2,5	6,25
$\sum$			25

$$S^2_{ад} = \frac{2 \cdot 25}{4 - 3} = 50;\quad F = \frac{50}{200} = 0{,}25.$$

Если полученное дисперсионное отношение оказывается меньше табличного $F < F_{(1 - p,\ f1,\ f2)}$, где p – уровень значимости; $\nu_1 = N - l$ – число степеней свободы дисперсии адекватности; $\nu_2 = N(m - 1)$ – число степеней свободы дисперсии воспроизводимости, то уравнение адекватно эксперименту.

$$F = 0{,}25 < F_{(5\%,\ 3,\ 4)} = 6{,}5914$$

Следовательно, уравнение адекватно и его можно использовать для организации крутого восхождения.

С этой целью по формуле (3.11) определяется направление градиента $\nabla_1 = 22{,}5i + 32{,}5j$, а по формуле (3.15) вычисляется шаг ΔX_i по каждому фактору. Все расчеты, связанные с движением по градиенту, мысленные и реализованные опыты приведены в табл. 25.

Таблица 25

Движение по градиенту

Номер опыта	Величина и опыт	Физ. переменная		Отклик, ρ, кг/м^3
		X_1, кг/м^3	X_2, кг/м^3	
	Основной уровень, X_{i0}	5,5	2,3	638
	Интервал варьирования, h_i	0,3	0,2	
	Коэффициенты, b_i	22,5	32,5	
	Шаг $\Delta X_i = mh_ib_i$ ($m = 0{,}1$)	0,675	0,650	
	Округленный шаг	0,6	0,6	
1	Мысленный	6,1	2,9	774,5
2	Реализованный	6,7	3,5	900
3	«	7,3	4,1	1050
4	«	7,9	4,7	1110
5	Реализованный качественно	8,5	5,3	-

Продолжение табл. 25

При движении по градиенту плотность продукта увеличилась с 638 кг/м^3 в центре плана до 1110 кг/м^3 в опыте 4. В опыте 5 содержание компонентов А и В превысило максимально допустимое по технологии производства данного продукта. Поэтому в качестве оптимальных значений X_1 и X_2 должны быть приняты значения, полученные в 4-м опыте.

Литература

1. Трифонова М.Ф., Заика П.М., Устюжанин А.П. Основы научных исследований. – М.: Колос, 1993. – 239 с.
2. Коптев В.В, Богомягких В.А., Трифонова М.Ф. Основы научных исследований и патентоведения. - М.: Колос, 1993. – 251 с.
3. Ахназарова С.Л., Кафаров В.В. Оптимизация эксперимента в химии и химической технологии. – М.: Высш. школа, 1978. – 319 с.
4. Барабащук В.И., Креденцер Б.П., Мирошниченко В.И. Планирование эксперимента в технике. – К.: Техніка, 1984. – 200 с.
5. Егоров А.Е., Азаров Г.Н., Коваль А.В. Исследование устройств и систем автоматики методом планирования эксперимента. – Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1986. – 240 с.
6. Львовский Е.Н. Статистические методы построения эмпирических формул. – М.: Высш. шк., 1988. – 239 с.

Приложения

П.1 Квантили распределения максимального относительного отклонения τ_{1-P}

n	Уровни значимости P				n	Уровни значимости P			
	0,10	0,05	0,025	0,01		0,10	0,05	0,025	0,01
3	1,41	1,41	1,41	1,41	15	2,33	2,49	2,64	2,80
4	1,65	1,69	1,71	1,72	16	2,35	2,52	2,67	2,84
5	1,79	1,87	1,92	1,96	17	2,38	2,55	2,70	2,87
6	1,89	2,00	2,07	2,13	18	2,40	2,58	2,73	2,90
7	1,97	2,09	2,18	2,27	19	2,43	2,60	2,75	2,93
8	2,04	2,17	2,27	2,37	20	2,45	2,62	2,78	2,96
8	2,10	2,24	2,35	2,46	21	2,47	2,64	2,80	2,98
10	2,15	2,29	2,41	2,54	22	2,49	2,66	2,82	3,01
11	2,19	2,34	2,47	2,61	23	2,50	2,68	2,84	3,03
12	2,23	2,39	2,52	2,66	24	2,52	2,70	2,86	3,05
13	2,26	2,43	2,56	2,71	25	2,54	2,72	2,88	3,07
14	2,30	2,46	2,60	2,76					

П.2. Процентные точки распределения Стьюдента

ν	40%	25%	10%	5%	2,5%	1%	0,5%	0,25 %	0,1%	0,05 %
1	0,3249	1,0000	3,0777	6,3138	12,7062	31,8205	63,6567	127,3213	318,3088	636,62
2	2887	0,8165	1,8856	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248	14,0890	22,3271	31,599
3	2767	7649	6377	3534	3,1824	4,5407	5,8409	7,4533	10,2145	12,924
4	2707	7407	5332	1318	2,7764	3,7469	4,6041	5,5976	7,1732	8,6103
5	2672	7267	4759	2,0150	5706	3649	4,0321	4,7733	5,8934	6,8688
6	0,2648	0,7176	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	2,7074	4,3168	5,2076	5,9588
7	2632	7111	4149	8946	3646	2,9980	4995	4,0293	4,7853	4079
8	2619	7064	3968	8595	3060	8965	3554	3,8325	5008	5,0413
9	2610	7027	3830	8331	2622	8214	2498	6897	2968	4,7809
10	2602	6998	3722	8125	2281	7638	1693	5814	1437	5869
11	0,2596	0,6974	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	3,4966	4,0247	4,4370
12	2590	6955	3562	7823	1788	6810	0545	4284	3,9296	3178
13	2586	6938	3502	7709	1604	6503	3,0123	3725	8520	2208
14	2582	6924	3450	7613	1448	6245	2,9768	3257	7874	1405
15	2679	6912	3406	7530	1314	6025	9467	2860	7328	0728
16	0,2576	0,6901	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	3,2520	3,6862	4,0150
17	2573	6892	3334	7396	1098	5669	8982	2224	6458	3,9651
18	2571	6884	3304	7341	1009	5524	8784	1966	6105	9216
19	2569	6876	3277	7291	0930	5395	8609	1-737	5794	8834
20	2567	6870	3253	7247	0860	5280	8453	1534	5518	8495
21	0,2566	0,6864	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,1352	3,5272	3,8193
22	2564	6858	3212	7171	0739	5083	8188	1188	5050	7921
23	2563	6853	3195	7139	0687	4999	8703	1040	4850	7676
24	2562	6848	3178	7109	0639	4922	7969	0905	4668	7454
25	2561	6844	3163	7081	0595	4851	7874	0782	4502	7251

Продолжение табл. П2

ν	40%	25%	10%	5%	2,5%	1%	0,5%	0,25%	0,1%	0,05%
26	0,2560	0,6840	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,0669	3,4350	3,7066
27	2559	6837	3137	7033	0518	4727	7707	0565	4210	6896
28	2558	6834	3125	7011	0484	4671	7633	0469	4082	6739
29	2557	6830	3114	6991	0452	4620	7564	0380	3962	6594
30	2556	6828	3104	6973	0423	4573	7500	0298	3852	6460
32	0,2555	0,6822	1,3086	1,6939	2,0369	2,4487	2,7385	3,0149	3,3653	3,6218
34	2553	6818	3070	6909	0322	4411	7284	3,0020	3479	6007
36	2552	6814	3055	6883	0281	4345	7195	2.9905	3326	5821
38	2551	6810	3042	6860	0244	4286	7116	9803	3190	5657
40	2550	6807	3031	6839	0211	4233	7045	9712	3069	5510
42	0,2550	0,6804	1,3020	1,6820	2,0181	2,4185	2,6981	2,9630	3,2960	3,5377
44	254 9	6801	3011	6802	0154	4141	6923	9555	2861	5258
46	2548	6799	3002	6787	0129	4102	6870	9488	2771	5150
48	2548	6796	2994	677 2	0106	4066	6822	94 26	2689	5051
50	2547	6794	2987	6759	0086	4033	6778	9370	2614	4960
55	0,2546	0,6790	1,2971	1,6730	2,0040	2,3961	2,6682	2,9247	3,2561	3,4764
60	254 5	67 86	2958	6706	2,0003	3901	6603	9146	2317	4602
65	2544	6783	2947	6686	1,9971	3851	6536	9060	2204	4466
70	254 3	6780	2938	6669	9944	3808	6479	8987	2108	4350
80	0,254 2	0,6776	1,2922	1,6641	1,9901	3,3739	2,6387	2,8870	3,1953	3,4163
90	2541	6772	2910	6620	9867	3685	6316	8779	1833	4019
100	2540	6770	2901	6602	9840	3642	6259	8707	1737	3905
120	2539	6765	2886	6577	9799	3578	6174	8599	1595	3735
150	2538	6761	2872	6551	9759	3515	6090	8492	1455	3566
200	2537	6757	2858	6525	9719	3451	6006	8385	1315	3398
250	2536	6755	2849	6510	9695	3414	5956	8322	1232	3299
300	2536	6753	2844	6499	9679	3388	5923	8279	1176	3233
400	2535	6751	2837	6487	9659	3357	5882	8227	1107	3150
500	0,2535	0,6750	1,2832	1,6479	1,9647	2,3338	2,5857	2,8195	3,1066	3,3101

.3. Ординаты стандартной нормальной кривой

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3080	0,3977	0,3973
0. 1	0.3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0.2	0.3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0.3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0.4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0.7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0.8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1.2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0853	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0.0488	0.0478	0.0468	0.0459	0.0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0360
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0296
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0.0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
4,0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09

П.4. Процентные точки распределения χ^2

ν	99,95 %	99,9 %	99,5 %	99%	97,5%	95%	90%	80%	70%	60%	50%
1	0,0393	0,0157	0,0393	0,0157	0,0982	0,0393	0,0158	0,0642	0,148	0,275	0,455
2	0,0100	0,0200	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	0,446	0,713	1,022	1,386
3	0,0153	0,0243	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	1,005	1,424	1,869	2,366
4	0,0639	0,0908	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	1,649	2,195	2,753	3,357
5	0,158	0,210	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	2,343	3,000	3,655	4,351
6	0,299	0,381	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	3,070	3,828	4,570	5,348
7	0,485	0,598	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	3,822	4,671	5,493	6,346
8	0,710	0,857	1,344	1,646	2,180	2,733	3,490	4,594	5,527	6,423	7,344
9	0,972	1,153	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	5,380	6,393	7,357	8,343
10	1,265	1,479	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	6,179	7,267	8,295	9,342
11	1,587	1,834	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	6,989	8,148	9,237	10,341
12	1,934	2,214	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	7,807	9,034	10,182	11,340
13	2,305	2,617	3,565	4,107	5,009	5,892	7,042	8,634	9,926	11,129	12,340
14	2,697	3,041	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	9,467	10,821	12,079	13,339
15	3,108	3,483	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	10,307	11,721	13,030	14,339
16	3,536	3,942	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	11,152	12,624	13,983	15,338
17	3,980	4,416	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	12,002	13,531	14,937	16,338
18	4,439	4,905	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	12,857	14,440	15,893	17,338
19	4,912	5,407	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	13,716	15,352	16,850	18,338
20	5,398	5,921	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	14,578	16,266	17,809	19,337
21	5,896	6,447	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240	15,445	17,182	18,768	20,337
22	6,404	6,983	8,643	9,542	10,982	12,338	14,041	16,314	18,101	19,729	21,337
23	6,924	7,529	9,260	10,196	11,688	13,091	14,848	17,187	19,021	20,690	22,337
24	7,453	8,085	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	18,062	19,943	21,652	23,337
25	7,991	8,649	10,520	11,524	13,120	14,611	16,473	18,940	20,867	22,616	24,337
26	8,538	9,222	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292	19,820	21,792	23,579	25,336
27	9,093	9,803	11,808	12,879	14,573	16,151	18,114	20,703	22,719	24,544	26,336
28	9,656	10,391	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	21,588	23,647	25,509	27,336
29	10,227	10,986	13,121	14,256	16,047	17,708	19,768	22,475	24,577	26,475	28,336
30	10,804	11,588	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599	23,364	25,508	27,442	29,336
31	11,389	12,196	14,458	15,655	17,539	19,281	21,434	24,255	26,440	28,409	30,336
32	11,970	12,811	15,134	16,362	18,291	20,072	22,271	25,148	27,373	29,376	31,336
33	12,576	13,431	15,815	17,073	19,047	20,867	23,110	26,042	28,307	30,344	32,336
34	13,179	14,057	16,501	17,789	19,806	21,664	23,952	26,938	29,242	31,313	33,336
35	13,788	14,688	17,192	18,509	20,569	22,465	24,797	27,836	30,178	32,282	34,336
36	14,401	15,324	17,887	19,233	21,336	23,269	25,643	28,735	31,115	33,252	35,336
37	15,020	15,965	18,586	19,960	22,106	24,075	26,492	29,635	32,053	34,222	36,336
38	15,644	16,611	19,289	20,691	22,878	24,884	27,343	30,537	32,992	35,192	37,335
39	16,273	17,262	19,996	21,426	23,654	25,695	28,196	31,441	33,932	36,163	38,335
40	16,906	17,916	20,707	22,164	24,453	26,509	29.051	32,345	34,872	37,134	39,335

Продолжение табл. П.4

40%	30%	20%	10%	5%	2,5%	1%	0,5%	0,1%	0,05 %	ν
0,708	1,074	1,642	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879	10,828	12,116	1
1,833	2,408	3,219	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597	13,816	15,202	2
2,946	3,665	4,642	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838	16,266	17,730	3
4,045	4,878	5,989	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860	18,467	19,997	4
5,132	6,064	7,289	9,236	11,070	12,832	15,086	16,750	20,515	22,105	5
6,211	7,231	8,558	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548	22,458	24,103	6
7,283	8,383	9,803	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278	24,322	26,018	7
8,351	9,524	11,030	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955	26,125	27,868	8
9,414	10,656	12,242	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589	27,877	29,666	9
10,473	11,781	13,442	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188	29,588	31,420	10
11,530	12,899	14,631	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757	31,264	33,136	11
12,584	14,011	15,812	18,549	21,026	23,336	26,217	28,300	32,909	34,821	12
13,636	15,119	16,985	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819	34,528	36,478	13
14,685	16,222	18,151	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319	36,123	38,109	14
15,733	17,322	19,311	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801	37,697	39,719	15
16,780	18,418	20,465	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267	39,252	41,308	16
17,824	19,511	21,615	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718	40,790	42,879	17
18,868	20,601	22,760	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156	42,312	44,434	18
19,910	21,689	23,900	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582	43,820	45,973	19
20,951	22,775	25,038	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997	45,315	47,498	20
21,991	23,858	26,171	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401	46,797	49,010	21
23,031	24,939	27,301	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796	48,268	50,511	22
24,069	26,018	28,429	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181	49,728	52,000	23
26,106	27,096	29,553	33,196	36,415	39,364	42,980	45,558	51,179	53,479	24
26,143	28,172	30,675	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928	52,620	54,947	25
27,179	29,246	31,795	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290	54,052	56,407	26
28,214	30,319	32,912	36,741	40,113	43,194	46,963	49,645	55,476	57,858	27
29,249	31,391	34,027	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993	56,892	59,300	28
30,283	32,461	35,139	39,087	42,557	45,722	49,588	52,336	58,301	60,735	29
31,316	33,530	36,250	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672	59,703	62,162	30
32,349	34,598	37,359	41,422	44,985	48,232	52,191	55,003	61,098	63,582	31
33,381	35,665	38,466	42,585	46,194	49,480	53,486	56,328	62,487	64,995	32
34,413	36,731	39,572	43,745	47,400	50,725	54,776	57,648	63,870	66,402	33
35,444	37,795	40,676	44,903	48,602	51,966	56,061	58,964	65,247	67,803	34
36,475	38,859	41,778	46,059	49,802	53,203	57,342	60,275	66,619	69,199	35
37,505	39,922	42,879	47,212	50,998	54,437	58,619	61,581	67,985	70,588	36
38,535	40,984	43,978	48,363	52,192	55,668	59,892	62,882	69,346	71,972	37
39,564	42,045	45,076	49,513	53,384	56,895	61,162	64,181	70,703	73,351	38
40,593	43,105	46,173	50,660	54,572	58,120	62,428	65,476	72,055	74,725	39
41,622	44,165	47,269	51,805	55,758	59,342	62,691	66,766	73,402	76,095	40

П.5. Процентные точки F-распределения Фишера, p = 10%

ν_1 / ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	39,846	49,500	53,593	55,833	57,241	58,204	58,906	59,439	59,858
2	8,5263	9,0000	9,1618	9,2434	9,2926	9,3255	9,3491	9,3668	9,3805
3	5,5383	5,4624	5,3908	5,3427	5,3092	5,2847	5,2662	5,2517	5,2400
4	4,5448	4,3246	4,1908	4,1073	4,0506	4,0098	3,9790	3,9549	3,9357
5	4,0604	3,7797	3,6195	3,5202	3,4530	3,4045	3,3679	3,3393	3,3163
6	3,7760	3,4633	3,2888	3,1808	3,1075	3,0546	3,0145	2,9830	2,9577
7	3,5894	3,2574	3,0741	2,9605	2,8833	2,8274	2,7849	2,7516	2,7247
8	3,4579	3,1131	2,9238	2,8064	2,7265	2,6683	2,6241	2,5893	2,5612
9	3,3603	3,0065	2,8129	2,6927	2,6106	2,5509	2,5053	2,4694	2,4403
10	3,2850	2,9345	2,7277	2,6053	2,5216	2,4606	2,4140	2,3772	2,3473
11	3,2252	2,8595	2,6602	2,5362	2,4512	2,3891	2,3416	2,3040	2,2735
12	2,1765	2,8068	2,6055	2,4801	2,3940	2,3310	2,2828	2,2446	2,2135
13	3,1362	2,7632	2,5603	2,4337	2,3467	2,3830	2,2341	2,1953	2,1638
14	3,1022	2,7275	2,5222	2,3947	2,3069	2,2426	2,1931	2,1539	2,1220
15	3,0732	2,6952	2,4898	2,3614	2,2730	2,2081	2,1582	2,1185	2,0862
16	3,0481	2,6682	2,4618	2,3327	2,2438	2,7849	2,1280	2,0880	2,0553
17	3,0262	2,6446	2,4374	2,3077	2,2183	2,1524	2,1017	2,0613	2,0284
18	3,0070	2,6239	2,4160	2,2858	2,1958	2,1296	2,0785	2,0379	2,0047
19	2,9899	2,6055	8,3970	2,2663	2,1760	2,1094	2,0580	2,0171	1,9836
20	2,9747	2,5893	2,3801	2,2489	2,1582	2,0913	2,0397	1,9985	1,9649
21	2,9609	2,5746	2,3649	2,2333	2,1423	2,0751	2,0232	1,9819	1,9480
22	2,9486	2,5613	2,3512	2,2193	2,1279	2,0605	2,0084	1,9668	1,9327
23	2,9374	2,5493	2,3387	2,2065	2,1149	2,0472	1,9949	1,9531	1,9189
24	2,9271	2,5383	2,3274	2,1949	2,1030	2,0351	1,9826	1,9407	1,9063
25	2,9177	2,5283	2,3170	2,1843	2,0922	2,0241	1,9714	1,9292	1,8947
26	2,9091	2,5191	2,3075	2,1745	2,0822	2,0139	1,9640	1,9188	1,8841
27	2,9012	2,5106	2,2987	2,1655	2,0730	2,0045	1,9515	1,9091	1,8743
28	2,8939	2,5028	2,2906	2,1571	2,0645	1,9959	1,9427	1,9001	1,8652
29	2,8871	2,4950	2,2831	2,1494	2,0566	1,9878	1,9345	1,8918	1,8568
30	2,8807	2,4887	2,2761	2,1422	2,0492	1,9803	1,9269	1,8841	1,8490
40	2,8354	2,4404	2,2261	2,0909	1,9968	1,9269	1,8725	1,8289	1,7929
60	2,7914	2,3933	2,1774	2,0410	1,9457	1,8747	1,8194	1,7748	1,7380
120	2,7478	2,3473	2,1300	1,9923	1,8959	1,8238	1,7675	1,7220	1,6843
∞	2,7055	2,3026	2,0838	1,9449	1,8473	1,7741	1,7167	1,6702	1,6315

Продолжение табл. П.5

ν_1 / ν_2	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	60,195	60,705	61,220	61,740	62,002	62,265	62,529	62,794	63,061	63,328
2	9,3916	9,4081	9,4247	9,4413	9,4496	9,4579	9,4663	9,4746	9,4829	9,4913
3	5,2304	5,2156	5,2003	5,1845	5,1764	5,1681	5,1597	5,1512	5,1425	5,1337
4	3,9199	3,8955	3,8703	3,8443	3,8310	3,8174	3,8036	3,7896	3,7753	3,7607
5	3,2974	3,2682	3,2380	3,2067	3,1905	3,1741	2,1573	3,1402	3,1228	3,1050
6	2,9369	2,9047	2,8712	2,8363	2,8183	2,8000	2,7812	2,7620	2,7423	2,7222
7	2,7025	2,6681	2,6322	2,2547	2,5753	2,5555	2,5351	2,5142	2,4928	2,4708
8	2,5380	2,5020	2,4642	2,4246	2,4041	2,3830	2,3614	2,3391	2,3162	2,2926
9	2,4163	2,3789	2,3396	2,2983	2,2768	1,2547	2,2320	2,2085	2,1843	2,1592
10	2,3226	2,2841	2,2435	2,2007	2,1784	2,1554	2,1317	2,1072	2,0818	2,0554
11	2,2482	2,2087	2,1671	2,1230	2,1000	2,0762	2,0516	2,0261	1,9997	1,9721
12	2,1878	2,1474	2,1049	2,0597	2,0360	2,0115	1,9861	1,9597	1,9323	1,9036
13	2,1376	2,0966	2,0532	2,0070	1,9827	1,9576	1,9315	1,9043	1,8759	1,8462
14	2,0954	2,0537	2,0095	1,9625	1,9377	1,9119	1,8852	1,8572	1,8230	1,7973
15	2,0593	2,0171	1,9722	1,9243	1,8990	1,8728	1,8454	1,8168	1,7867	1,7551
16	2,0281	1,9854	1,9399	1,8913	1,8656	1,8388	1,8108	1,7816	1,7507	1,7182
17	2,0009	1,9577	1,9117	1,8624	1,8362	1,8090	1,7805	1,7506	1,7191	1,6856
18	1,9770	1,9333	1,8868	1,8368	1,8103	1,7827	1,7537	1,7232	1,6910	1,6567
19	1,9557	1,9117	1,8647	1,3142	1,7873	1,7592	1,7298	1,6988	1,6659	1,6308
20	1,9367	1,8924	1,8449	1,7938	1,7667	1,7382	1,7083	1,6768	1,6433	1,6074
21	1,9197	1,8750	1,8272	1,7756	1,7481	1,7193	1,6890	1,6569	1,6228	1,5862
22	1,9043	1,8593	1,8111	1,7590	1,7312	1,7021	1,6714	1,6389	1,6042	1,5668
23	1,8903	1,8450	1,7964	1,7439	1,7159	1,6964	1,6554	1,6224	1,5871	1,5490
24	1,8775	1,8319	1,7831	1,7302	1,7019	1,6701	1,6407	1,6073	1,5715	1,5327
25	1,8658	1,8200	1,7708	1,7175	1,6890	1,6589	1,6272	1,5934	1,5570	1,5176
26	1,8550	1,8090	1,7596	1,7059	1,6771	1,6468	1,6147	1,5805	1,5437	1,5036
27	1,8451	1,7989	1,7492	1,6951	1,6662	1,6356	1,6032	1,5686	1,5313	1,4906
28	1,8359	1,7895	1,7395	1,6852	1,6560	1,6252	1,5925	1,5575	1,5198	1,4784
29	1,8274	1,7808	1,7306	1,6759	1,6465	1,6155	1,5855	1,5472	1,5090	1,4670
30	1,8195	1,7727	1,7223	1,6673	1,6377	1,6065	1,5732	1,5376	1,4989	1,4564
40	1,7627	1,7146	1,6624	1,6052	1,5741	1,5411	1,5056	1,4672	1,4248	1,3769
60	1,7070	1,6574	1,6034	1,5435	1,5107	1,4755	1,4373	1,3952	1,3476	1,2915
120	1,6524	1,6012	1,5450	1,4821	1,4472	1,4094	1,3676	1,3203	1,2646	1,1926
∞	1,5987	1,5458	1,4871	1,4206	1,3832	1,3419	1,2951	1,2400	1,1686	1,1000

П.6. Процентные точки F-распределения Фишера, p = 5%

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	140,54
2	18,513	19,000	19,164	19,247	19,296	19,330	19,353	19,371	19,385
3	10,128	9,5521	9,2766	9,1172	19,0135	8,9406	8,8868	8,8452	8,8123
4	7,7086	6,9443	6,5914	6,3883	6,2560	6,1631	6,0942	6,0410	5,9988
5	6,6079	5,7861	5,4095	5,1922	5,0503	4,9503	4,8759	4,8183	4,7725
6	5,9874	5,1433	4,7571	4,5337	4,3874	4,2839	4,2066	4,1468	4,0990
7	5,5914	4,7374	4,3468	4,1203	3,9715	3,8660	3,7870	3,7257	3,6767
8	5,3177	4,4590	4,0662	3,8378	3,6875	3,5806	3,5005	3,4381	3,3881
9	5,1174	4,2565	3,8626	3,6331	3,4817	3,3738	3,2927	3,2296	3,1789
10	4,9646	4,1028	3,7083	3,4780	3,3258	3,2172	3,1355	3,0717	3,0204
11	4,8443	3,9823	3,5874	3,3567	3,2039	2,0946	3,0123	2,9480	2,8962
12	4,7472	3,8853	3,4903	3,2592	3,1059	2,9961	2,9134	2,8486	2,7964
13	4,6672	3,8056	3,4105	3,1791	3,0254	2,9153	2,8321	2,7669	2,7144
14	4,6001	3,7389	3,3439	3,1122	2,9582	2,8477	2,7642	2,6987	2,6458
15	4,5431	3,6823	3,2974	3,0556	2,9013	2,7905	2,7066	2,6408	2,5876
16	4,4940	3,6337	3,2389	3,0069	2,8524	2,7413	2,6572	2,5911	2,5377
17	4,4513	3,5915	3,1968	2,9647	2,8100	2,6987	2,6143	2,5480	2,4943
18	4,4139	3,5546	3,1599	2,9277	2,7729	2,6613	2,5767	2,5102	2,4563
19	4,3808	3,5219	3,1274	2,8951	2,7401	2,6283	2,5435	2,4768	2,4227
20	4,3513	3,4928	3,0984	2,8661	2,7109	2,5990	2,5140	2,4471	2,3928
21	4,3248	3,4668	3,0725	2,8401	2,6848	2,5727	2,4876	2,4205	2,3661
22	4,3009	3,4434	3,0491	2,8167	2,6613	2,5491	2,4638	2,3965	2,3419
23	4,2793	3,4221	3,0280	2,7955	2,6400	2,5277	2,4422	2,3748	2,3201
24	4,2597	3,4028	3,0088	2,7763	2,6207	2,5082	2,4226	2,3551	2,3002
25	4,2417	3,3852	2,9912	2,7587	2,6030	2,4904	2,4047	2,3371	2,2821
26	4,2252	3,3690	3,9751	2,7426	2,5868	2,4741	2,3883	2,3205	2,2655
27	4,2100	3,3541	2,9604	2,7278	2,5719	2,4591	2,3732	2,3053	2,2501
28	4,1960	3,3404	2,9467	2,7141	2,5581	2,4453	2,3593	2,2913	2,2360
29	4,1830	3,3277	2,9340	2,7014	2,5454	2,4824	2,3463	2,2782	2,2229
30	4,1709	3,3158	2,9223	2,6896	2,5336	2,4205	2,3343	2,2662	2,2107
40	4,0848	3,2317	2,8387	2,6060	2,4495	2,3359	2,2490	2,1802	2,1240
60	4,0012	3,1504	2,7581	2,5252	2,3683	2,2540	2,1665	2,0970	2,0401
120	3,9201	3,0718	2,6802	2,4472	2,2900	2,1750	2,0867	2,0164	1,9588
∞	3,8415	2,9957	2,6049	2,3719	2,2141	2,0986	2,0096	1,9384	1,8799

Продолжение табл. П.6

ν_2 \ ν_1	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	241,88	243,91	245,95	248,01	249,05	250,09	251,14	252,20	253,25	254,32
2	19,396	19,413	19,429	19,446	19,454	19,462	19,471	19,479	19,487	19,496
3	8,7855	8,7446	8,7029	8,6602	8,6385	8,6166	8,5944	8,5720	8,5494	8,5265
4	5,9644	5,9117	5,8578	5,8025	5,7744	5,7459	5,71.70	5,6870	5,6581	5,6281
5	4,7351	4,6777	4,6188	4,5581	4,5272	4,4957	4,4638	4,4314	4,3984	4,3650
6	4,0600	3,9999	3,9381	3,8742	3,8415	3,8082	3,7743	3,7398	3,7047	3,6688
7	3,6365	3,5747	3,5108	3,4445	3,4105	3,3758	3,3404	3,3043	3,2674	3,2298
8	3,3472	3,2840	3,2184	3,1503	3,1152	3,0794	3,0428	3,0053	2,9669	2,9276
9	3,1373	3,0729	3,0061	2,9365	2,9005	2,8637	2,8259	2,7872	2,7475	2,7067
10	2,9782	2,9130	2,8450	2,7740	2,7372	2,6996	2,6609	2,6211	2,5801	2,5379
11	2,8536	2,7876	2,7186	2,6464	2,6090	2,5705	2,5309	2,4901	2,4480	2,4045
12	2,7534	2,6866	2,6169	2,5436	2,5055	2,4663	2,4259	2,3842	2,3410	2,2962
13	2,6710	2,6037	2,5331	2,4589	2,4202	2,3803	2,3392	2,2966	2,2524	2,2064
14	2,6021	2,5342	2,4630	2,3879	2,3487	2,3082	2,2664	2,2230	2,1778	2,1307
15	2,5437	2,4753	2,4035	2,3275	2,2878	2,2468	2,2043	2,1601	2,1141	2,0658
16	2,4935	2,4247	2,3522	2,2756	2,2354	2,1938	2,1507	2,1058	2,0589	2,0096
17	2,4499	2,3807	2,3977	2,2304	2,1898	2,1477	2,1040	2,0584	2,0107	1,9604
18	2,4117	2,3421	2,2686	2,1906	2,1497	2,1071	2,0629	2,0166	1,9681	1,9168
19	2,3779	2,3080	2,2341	2,1555	2,1141	2,0712	2,0264	1,9796	1,9302	1,8780
20	2,3479	2,2776	2,2033	2,1242	2,0825	2,0391	1,9938	1,9464	1,8961	1,8432
21	2,3210	2,2504	2,1757	2,0960	2,0540	2,0102	1,9645	1,9165	1,8657	1,8117
22	2,2967	2,2258	2,1508	2,0707	2,0283	1,9842	1,9380	1,8895	1,8380	1,7831
23	2,2747	2,2036	2,1282	2,0476	2,0050	1,9605	1,9139	1,8649	1,8128	1,7570
24	2,2547	2,1834	2,1077	2,0267	1,9838	1,9390	1,8920	1,8424	1,7897	1,7331
25	2,2365	2,1649	2,0889	2,0075	1,9643	1,9192	1,8778	1,8217	1,7684	1,7110
26	2,2197	2,1479	2,0716	1,9898	1,9464	1,9010	1,8533	1,8027	1,7488	1,6906
27	2,2043	2,1323	2,0558	1,9736	1,9299	1,8842	1,8361	1,7851	1,7307	1,6717
28	2,1900	2,1179	2,0411	1,9586	1,9147	1,8687	1,8203	1,7689	1,7138	1,6541
29	2,1768	2,1045	2,0275	1,9446	1,9005	1,8543	1,8055	1,7537	1,6981	1,6377
30	2,1646	2,0921	2,0148	1,9317	1,8874	1,8409	1,7918	1,7396	1,6835	1,6223
40	2,0772	2,0035	1,9245	1,8389	1,7929	1,7444	1,6928	1,6373	1,5766	1,5089
60	1,9926	1,9174	1,8364	1,7480	1,7001	1,6491	1,5943	1,5343	1,4673	1,3893
120	1,9105	1,8337	1,7505	1,6587	1,6084	1,5543	1,4952	1,4290	1,3519	1,2539
∞	1,8307	1,7522	1,6664	1,5705	1,5173	1,4591	1,3940	1,3180	1,2214	1,0000

П. 7. Квантили распределения Кохрена при р = 0,05

f_2	f_1													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	i'6	36	144	∞
2	9985	9750	9392	9057	8772	8534	8332	8159	8010	7880	7341	6602	5813	5000
3	9669	8709	7977	7457	7071	6771	6530	6333	6167	6025	5466	4748	4031	3333
4	9065	7679	6841	6287	5895	5598	5365	5175	5017	4884	4366	3720	3093	2500
5	8412	6838	5981	5441	5065	4783	4564	4387	4241	4118	3645	3066	2513	2000
6	7808	6161	5321	4803	4447	4184	3980	3817	3682	3568	3135	2612	2119	1667
7	7271	5612	4800	4307	3974	3726	3535	3384	3259	3154	2756	2278	1833	1429
8	6798	5157	4377	3910	3595	3362	3185	3043	2926	2829	2462	2022	1616	1250
9	6385	4775	4027	3584	3286	3067	2901	2768	2659	2568	2226	1820	1446	1111
10	6020	4450	3733	3311	3029	2823	2666	2541	2439	2353	2032	1655	1308	1000
12	5410	3924	3264	2880	2624	2439	2299	2187	2098	2020	1737	1403	1100	0833
15	4709	3346	2758	2419	2195	2034	1911	1815	1736	1671	1429	1144	0889	0667
20	3894	2705	2205	1921	1735	1602	1501	1422	1357	1303	1108	0879	0675	0500
24	3434	2354	1907	1656	1493	1374	1286	1216	1160	1113	0942	0743	0567	0417
30	2929	1980	1593	1377	1237	1137	1061	1002	0958	0921	0771	0604	0457	0333
40	2370	1576	1259	1082	0968	0887	0827	0780	0745	0713	0595	0462	0347	0250
60	1737	1131	0895	0765	0682	0623	0583	0552	0520	0497	0411	0316	0234	0167
120	0998	0632	0495	0419	0371.	0337	0312	0292	0279	0266	0218	0165	0120	0083
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Примечание. Все квантили G_{1-p} меньше единицы, поэтому в табл. П.7 приведены лишь десятичные знаки, следующие после запятой, перед которой при пользовании таблицей нужно ставить ноль целых. Например, при $f_2 = 6$, $f_1 = 3$ имеем $G_{0,95} = 0,5321$.

Николай Иванович Ткаченко

ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Учебное пособие

Для бакалавров, обучающихся по направлению подготовки 280700.62 - «Техносферная безопасность», профиль «Безопасность технологических процессов и производств»

Редакция в авторском исполнении
Компьютерная верстка Н.И.Ткаченко

Донской государственный аграрный университет
346493, пос. Персиановский, Октябрьский район, Ростовская область

Подписано в печать 28.05.2017 г. Тираж 50 экз.
Объем - 1,1 уч. изд. л Заказ № 302 Формат 60x84 1/16

Лицензия на полиграфическую деятельность
ЛР №131864 от 12.01.1998
Типография НГМА, г. Новочеркасск, ул. Пушкинская, 111