**Министерство сельского хозяйства Российской Федерации**
**Департамент научно-технологической политики и образования**
**Донской государственный аграрный университет**

**Е.М. Демьян, А.Г. Мокриевич**

# ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебное пособие для самостоятельной работы

**пос. Персиановский**
**2012**

УДК 51
ББК 22.11

**Рецензенты**: А. И. Тариченко доктор с.-х. наук, профессор, зав кафедрой ТТЭ; В.К. Шаршак доктор техн. наук, профессор кафедры МОППП.

**Демьян Е.М., Мокриевич А.Г. Линейная алгебра.** Учебное пособие для самостоятельной работы. – пос. Персиановский, Донской ГАУ. - 64с.

В пособии приведена рабочая программа дисциплины «Линейная алгебра», методы и примеры выполнения типовых заданий, задания для самостоятельной работы, справочные материалы и список литературы.

Пособие предназначено для студентов направления подготовки 080100.62 «Экономика».

Библиография – 6 наименований.

Утверждено на методической комиссии
экономического факультета
(протокол № 5 от 22.05.2012 г. ).

Рекомендовано к изданию методическим советом
Донского ГАУ (протокол № 7 от 13.07.2012 г. ).

## Оглавление

## Предисловие

Настоящее пособие разработано на основании Государственного образовательного стандарта (ГОС) Высшего профессионального образования (ВПО) РФ, учебного плана Дон ГАУ и рабочей программы по курсу «Линейная алгебра». Рабочая программа по дисциплине «Линейная алгебра» для студентов направления подготовки «Экономика» рассмотрена на заседаниях кафедры высшей математики и физики, методической комиссии экономического факультета, методического совета Дон ГАУ и утверждена проректором по учебной работе Дон ГАУ профессором И.В. Фетюхиным.

Основной формой обучения студентов – заочников является *самостоятельная работа над учебным материалом.* Для студентов очного обучения самостоятельная работа также является важной формой обучения. Данное пособие содержит основные документы, образцы выполнения типовых заданий и указания, необходимые студентам для самостоятельного выполнения индивидуальной контрольной работы, освоения курса и подготовки к экзамену.

**1. Рабочая программа по дисциплине «Линейная алгебра» для студентов направления подготовки «Экономика» ДонГАУ**

**1.1. Цели и задачи дисциплины:**

*целью* преподавания дисциплины является развитие у студентов абстрактных понятий линейной алгебры, используемых для описания и моделирования различных математических и экономических задач в производственной и исследовательской деятельности;

основной *задачей* преподавания является развитие логического и алгоритмического мышления; привитие студентам навыков использования алгебраических методов в практической деятельности при создании математических моделей экономических систем.

**1.2. Место дисциплины в структуре ООП:**

Учебная дисциплина «Линейная алгебра» входит в цикл общих математических и естественнонаучных дисциплин. Требования к входным знаниям и умениям студента – знание элементарной математики: алгебры, элементарных функций. Данная дисциплина является предшествующей для следующих дисциплин: «Математический анализ», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Методы оптимальных решений», «Микроэкономика», «Макроэкономика», «Эконометрика», «Статистика», «Теория бухгалтерского учета», «Экономика фирмы», «Менеджмент».

**1.3. Требования к результатам освоения дисциплины:**

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих профессиональных компетенций:

способен понимать сущность и значение информации в развитии современного информационного общества, сознавать опасности и угрозы, возникающие в этом процессе, соблюдать основные требования информационной безопасности, в том числе защиты государственной тайны (ОК – 12 );

владеет основными методами¸ способами и средствами получения, хранения, переработки информации, имеет навыки работы с компьютером как средством управления информацией, способен работать с информацией в глобальных компьютерных сетях (ОК – 13);

способен на основе типовых методик и действующей нормативно-правовой базы рассчитать экономические и социально-экономические показатели, характеризующие деятельность хозяйствующих субъектов, (ПК-2);

способен выполнять необходимые для составления экономических разделов планов расчеты, обосновывать их и представлять результаты работы в соответствии с принятыми в организации стандартами (ПК-3);

способен осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения поставленных экономических задач (ПК-4);

способен выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы (ПК-5);

В результате изучения дисциплины студент должен:

*Знать*: основные понятия и методы линейной алгебры, необходимые для решения экономических задач;

*Уметь*: применять методы линейной алгебры и моделирования, теоретического и экспериментального исследования для решения экономических задач;

*Владеть*: навыками применения современного математического инструментария для решения экономических задач; методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических явлений и процессов.

Рабочая программа содержит перечень тем, которые должны быть изучены студентами. Последовательность изучения тем, методика их изложения и распределение материала по семестрам программой не предусматриваются и устанавливаются кафедрой высшей математики и физики с учетом потребностей специальных и смежных кафедр.

### 1.4. Содержание дисциплины

**Матрицы и определители.** Основные понятия и определения. Виды матриц. Операции над матрицами: умножение матрицы на число, сложение и вычитание матриц, умножение матриц, возведение матрицы в степень. Транспонирование матрицы.

Определители. Основные свойства определителей. Миноры. Алгебраические дополнения. Способы вычисления определителей второго и третьего порядка. Определители n-го порядка.

Обратная матрица. Теорема о существовании обратной матрицы. Нахождение обратной матрицы через алгебраические дополнения и с помощью элементарных преобразований.

Ранг матрицы. Элементарные преобразования матриц. Связь ранга с числом независимых строк (столбцов).

**Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).** Основные понятия. Решение системы **n** линейных алгебраических уравнений с **n** переменными по формулам Крамера. Матричная запись системы уравнений и ее решение в матричной форме.

Решение системы **m** линейных алгебраических уравнений с **n** переменными. Теорема Кронекера - Капелли.

Базисные решения системы уравнений. Базисные и свободные переменные. Исследование и решение СЛАУ методом Гаусса. Метод Гаусса-Жордана.

Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система уравнений. Общее решение системы неоднородных уравнений.

Модель Леонтьева многоотраслевой экономики (балансовый анализ).

**Векторная алгебра.** Понятие вектора. Модуль вектора. Линейные операции над векторами. Линейная зависимость и независимость векторов. Прямоугольный декартов базис. Линейные операции над векторами, заданными координатами. Проекция вектора на ось. Направляющие косинусы вектора.

Скалярное произведение векторов, его свойства. Скалярное произведение в координатной форме. Векторное произведение двух векторов, его геометрический смысл. Свойства векторного произведения. Векторное произведение в координатной форме.

Смешанное произведение векторов, его геометрический смысл. Условие компланарности трех векторов. Смешанное произведение в координатной форме. Задачи решаемые методами векторной алгебры: задача о делении отрезка в данном отношении; условие коллинеарности двух векторов; вычисление площадей и объемов.

**Линейные (векторные) пространства.** Понятие n-мерного линейного векторного пространства. Вектор в n-мерном пространстве. Линейная зависимость и независимость векторов линейного пространства. Размерность и базис линейного пространства. Разложение вектора по базису. Дополнение до базиса. Переход к новому базису. Матрица перехода. Свойства матрицы перехода.

Линейные подпространства. Сумма и пересечение линейных подпространств. Линейная оболочка. Евклидовы пространства. Свойства длины вектора. Ортонормированные базисы. Матрицы Грама.

Линейные отображения. Понятие о линейных отображениях. Образ, ранг, ядро, дефект отображения. Отображение базиса.

Линейные операторы и их свойства. Матричная запись линейных операторов. Матрица линейного преобразования.

Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Независимость собственных векторов. Симметричный оператор. Ортогональность собственных векторов.

Квадратичные формы. Понятие квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Свойства канонических форм. Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы. Основные понятия линейной модели обмена.

**Аналитическая геометрия на плоскости.** Основные системы координат на плоскости: декартова прямоугольная и полярная, связь между ними. Преобразование прямоугольных координат: параллельный перенос осей координат; поворот осей координат.

Определение расстояния между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении.

Линия на плоскости. Уравнение прямой на плоскости. Угловой коэффициент прямой. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой, частные случаи. Уравнение прямой, проходящей через точку в заданном направлении. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Уравнение прямой в отрезках. Каноническое уравнение прямой. Уравнение прямой, параллельной данному вектору.

Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Точка пересечения двух прямых. Расстояние от точки до прямой.

Задание фигур уравнениями и неравенствами: прямая, полуплоскость.

Кривые второго порядка. Уравнение окружности, свойства окружности. Каноническое уравнение эллипса, его свойства. Каноническое уравнение гиперболы, свойства гиперболы. Виды гипербол. Каноническое уравнение параболы, свойства параболы. Виды парабол.

Преобразования координат и упрощение кривых второго порядка. Приведение к каноническому виду общего уравнения кривой второго порядка.

**Аналитическая геометрия в пространстве.** Уравнения плоскости в пространстве. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору. Общее уравнение плоскости. Частные случаи общего уравнения плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

Прямая в пространстве. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Прямая и плоскость в пространстве.

Поверхности второго порядка: сфера, цилиндрические поверхности и конус второго порядка. Поверхности вращения. Общее уравнение поверхности второго порядка.

**Комплексные числа.** Алгебраическая форма комплексных чисел, арифметические операции над комплексными числами в алгебраической форме. Тригонометрическая и показательная формы комплексных чисел. Модуль и аргумент. Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах.

## 2. Примеры выполнения типовых заданий, методические указания, вопросы для самопроверки и задания для самостоятельного решения

### 2.1. Матрицы. Определители

Литература: [1] гл.1, §1.1-1.4; [2] гл.2,3; [3] гл.1, §1-2; [4] гл.1; [5] гл.4, §1-2; [6] гл.3, §1-2.

**Разберите решение задачи 1.**

**Даны матрицы A и B:**

**а) найти произведение матриц A и B;**

**б) вычислить определитель матрицы А;**
**в) записать транспонированную матрицу $A^T$;**
**г)показать, что след матрицы А равен следу матрицы $A^T$.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 \\ -5 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & -3 & 7 & 1 \\ 3 & -2 & 7 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

**Решение:**

**а) найти произведение матриц А и В, если**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 \\ -5 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & -3 & 7 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

***Произведением матрицы*** $A_{m\times n}$ ***на матрицу*** $B_{n\times p}$ называется такая матрица $C_{m\times p}$, что

$$c_{ij} = a_{i1}\cdot b_{1j} + a_{i2}\cdot b_{2j} + ... + a_{in}\cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}$$

Произведение матриц А и В может быть найдено только в том случае, когда число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В.

Чтобы получить элемент, стоящий в i-той строке и j-том столбце матрицы – произведения, нужно элементы i-той строки первой матрицы умножить на соответствующие элементы j-того столбца второй матрицы и произведения сложить. Далее перебираем все столбцы второй матрицы и все строки первой матрицы.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 \\ -5 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & -3 & 7 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot(-1)+4\cdot 2+(-2)\cdot 5+3\cdot(-2) & 2\cdot 3+4\cdot 0+(-2)\cdot 6+3\cdot 1 & 2\cdot 4+4\cdot 1+(-2)\cdot(-2)+3\cdot(-3) \\ (-5)\cdot(-1)+1\cdot 2+6\cdot 5+(-1)\cdot(-2) & (-5)\cdot 3+1\cdot 0+6\cdot 6+(-1)\cdot 1 & (-5)\cdot 4+1\cdot 1+6\cdot(-2)+(-1)(-3) \\ 0\cdot(-1)+(-3)\cdot 2+7\cdot 5+1\cdot(-2) & 0\cdot 3+(-3)\cdot 0+7\cdot 6+1\cdot 1 & 0\cdot 4+(-3)\cdot 1+7\cdot(-2)+1\cdot(-3) \\ 3\cdot(-1)+(-2)\cdot 2+1\cdot 5+(-1)\cdot(-2) & 3\cdot 3+(-2)\cdot 0+1\cdot 6+(-1\cdot 1) & 3\cdot 4+(-2)\cdot 1+1\cdot(-2)+(-1)\cdot(-3) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -2+8-10-6 & 6+0-12+3 & 8+4+4-9 \\ 5+2+30+2 & -15+0+36-1 & 20+1-12+3 \\ 0-6+35-2 & 0-0+42+1 & 0-3-14-3 \\ -3-4+5+2 & 9+0+6-1 & 12-2-2+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -10 & -3 & 7 \\ 39 & 20 & 12 \\ 27 & 43 & -20 \\ 0 & 14 & 9 \end{pmatrix}$$

**б) вычислить определитель матрицы А**

Число А= $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 \\ -5 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & -3 & 7 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, поставленное в соответствие квадратной матрице $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 \\ -5 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & -3 & 7 & 1 \\ 3 & -2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$, называется ее определителем. Данный определитель четвертого порядка ( матрица содержит 4 строки и 4 столбца). Вычислим его разложением по элементам строк или столбцов. Рациональнее находить значение определителя разложением по элементам 3-ей строки или 1-го столбца, т.к.наличие нуля в определителе уменьшает вычисления. Используем разложение определителя по элементам 3-ей строки, получим определители 3-его порядка, которые вычислим по правилу треугольников:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 \\ -5 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & -3 & 7 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=$$

$$=0+(-3)\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -5 & 6 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}+7\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -5 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -5 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=3\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -5 & 6 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}+7\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -5 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -5 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=3(2\cdot 6\cdot(-1))+(-5)\cdot 1\cdot 3+(-2)(-1)\cdot 3-$$

$$-3\cdot 6\cdot 3-(-5)\cdot(-2)\cdot(-1)-(-2)\cdot(-1)\cdot 3)+7(2\cdot 1\cdot(-1)+(-5)(-2)\cdot 3+4\cdot(-1)\cdot 3-3\cdot 1\cdot 3-(-5)\cdot 4\cdot(-1)-$$

$$-(-2)\cdot(-1)\cdot 2)-(2\cdot 1\cdot(-2)+(-5)(-2)(-2)+4\cdot 6\cdot 3-3\cdot 1\cdot(-2)-(-5)\cdot 4\cdot 1-(-2)\cdot 6\cdot 2)=$$

$$=3(-12-15+6-54+10+2)+7(-2+30-12-9-20-4)-(2-20+72+6+20+24)=$$

$$=3(-63)+7(-37)-104=-189-259-104=-552.$$

**в) записать транспонированную матрицу $\mathbf{A^T}$**

Матрица $B_{n\times m}$, полученная из матрицы $A_{m\times n}$ путем замены строк на столбцы, называется ***транспонированной*** к матрице **А** и обозначается $\mathbf{A^T}$.

Если матрица А имеет вид $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 \\ -5 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & -3 & 7 & 1 \\ 3 & -2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$, то транспонированная к ней матрица $A^T=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -3 & -2 \\ -2 & 6 & 7 & 7 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

**г)показать, что след матрицы А равен следу матрицы $\mathbf{A^T}$**

***Следом*** квадратной матрицы А называется сумма ее диагональных элементов. След обозначается trA.

trA = 2+1+7-1 = 9, $\quad$ $trA^T$ = 2+1+7-1 = 9

## Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение матрицы. Перечислите виды матриц.
2. Какие операции можно выполнять над матрицами? Какие ограничения существуют для них?
3. Объясните порядок выполнения умножения матриц. Какие матрицы могут перемножаться?
4. Объясните нахождение транспонированной матрицы; следа матрицы.
5. Что называется определителем второго, третьего, n-го порядков?
6. Назовите основные свойства определителей.
7. Перечислите способы вычисления определителей.
8. Объясните вычисление определителей: по правилу треугольников; разложением по элементам строк или столбцов.
9. Что называется минором, алгебраическим дополнением элемента определителя?

## Задания для самостоятельного решения

**Даны матрицы A и B:**

**а) найти произведение матриц A и B;**
**б) вычислить определитель матрицы A;**
**в) записать транспонированную матрицу $A^T$;**
**г)показать, что след матрицы A равен следу матрицы $A^T$.**

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 7 & 10 \\ 3 & 5 & 11 & 16 \\ 2 & -7 & 7 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 5 & 1 \\ -2 & 8 & 6 & 2 \\ 2 & 16 & 7 & 3 \\ -3 & 9 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ -1 & 7 & 3 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 10 & 6 \\ -9 & 8 & 8 & 5 \\ -8 & 5 & 9 & 5 \\ 11 & 7 & -7 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 7 & 8 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 5 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 5 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

7. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ -2 & -3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0 & 2\\ -2 & -1 & 5 & -3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & -3 & -5\\ -4 & 0 & 4\\ 2 & -1 & -3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$

8. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -2\\ -2 & 3 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 3 & 2\\ -2 & 1 & -4 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & -3 & -4\\ -3 & 5 & 4\\ 2 & 1 & -3\\ -3 & 0 & 2\end{pmatrix}$

9. $A=\begin{pmatrix}0 & -2 & 3 & -2\\ 2 & -3 & 1 & 4\\ 1 & 2 & -3 & 2\\ -2 & 1 & 5 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & -3 & -5\\ -4 & 2 & 4\\ 2 & 0 & -3\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$

10. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & -2\\ 2 & -3 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 3 & -5\\ -2 & 1 & -3 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 6\\ 5 & 6 & 4\\ 2 & -4 & -3\\ -3 & 1 & 0\end{pmatrix}$

11. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -2\\ 2 & -3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 3 & 2\\ -2 & 1 & 5 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & -3 & -1\\ -5 & 0 & 4\\ 2 & 6 & -3\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}$

12. $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 3 & -3\\ -2 & 1 & -5 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & -3 & -1\\ -7 & 0 & 4\\ 2 & 1 & -3\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$

13. $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & -2\\ 2 & -3 & 4 & 2\\ 1 & -4 & 3 & 2\\ -2 & 1 & -5 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & -3 & -1\\ 5 & 0 & 4\\ -2 & 1 & -3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$

14. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -2\\ 2 & -3 & 1 & 2\\ -5 & -1 & 3 & 2\\ -2 & 1 & 5 & -7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 6\\ 5 & -4 & 4\\ -2 & 1 & -3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$

15. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -2\\ 2 & -3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 3 & 2\\ -2 & 1 & 5 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & -3 & -5\\ -8 & 0 & 4\\ 2 & -1 & -3\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}$

16. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -2\\ -8 & -3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 3 & -3\\ -2 & -4 & 5 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 5\\ 5 & -2 & 4\\ 0 & 1 & -3\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$

17. $A=\begin{pmatrix}6 & 2 & 1 & -2\\ 2 & -3 & -4 & 2\\ 1 & -1 & 3 & 2\\ -2 & 1 & -3 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 6\\ 9 & 0 & -4\\ -2 & 1 & -3\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$

18. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -2\\ 2 & -3 & 1 & 2\\ -7 & -1 & 3 & -4\\ -2 & 1 & -5 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 0\\ -6 & 0 & 4\\ 2 & 3 & -3\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$

19. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -2\\ 2 & -3 & 1 & -7\\ 1 & -1 & 3 & 2\\ -2 & 1 & -6 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2 & -3 & -1\\ 5 & 0 & 4\\ 2 & -4 & -3\\ -5 & 1 & 2\end{pmatrix}$

20. $A=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 1 & -2\\ 2 & -3 & -6 & 2\\ 1 & -1 & 3 & -5\\ -2 & 1 & 0 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 6\\ 5 & 4 & -3\\ 0 & 1 & -5\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}$

## 2.2. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Литература: [1] гл.2, §2.1-2.6; [2] гл.4; [3] гл.1, §4; [4] гл.2; [5] гл.4, §5-7; [6] гл.3, §3.

**Разберите решение задачи 2.**

**Систему линейных алгебраических уравнений**

$$\begin{cases}3x+4y+2z=29\\ x+5y+z=25\\ 2x-4y-3z=-16\end{cases}$$

**решить:**

**а) по формулам Крамера;**

**б) с помощью обратной матрицы;**

**в) методом Гаусса.**

**Решение:**

**а) по формулам Крамера**

Формулы Крамера, позволяющие найти решение системы уравнений третьего порядка с тремя неизвестными в том случае, когда $\Delta \neq 0$ имеют вид:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}, \text{ где } \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ - определитель системы,

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$ - дополнительные определители, получающиеся из определителя системы путем замены столбцов, соответствующих неизвестных $x_1, x_2, x_3$ на столбец свободных коэффициентов.

Составляем и вычисляем определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \end{vmatrix} = -45 - 8 + 8 - 20 + 12 + 12 = -41 \neq 0$$, т.е. система определена и имеет единственное решение.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 29 & 4 & 2 \\ 25 & 5 & 1 \\ -16 & -4 & -3 \end{vmatrix} = -435 - 200 - 64 + 160 + 300 + 116 = -123,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 29 & 2 \\ 1 & 25 & 1 \\ 2 & -16 & -3 \end{vmatrix} = -225 - 32 + 58 - 100 + 87 + 48 = -164,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 29 \\ 1 & 5 & 25 \\ 2 & -4 & -16 \end{vmatrix} = -240 - 116 + 200 - 290 + 64 + 300 = -82 .$$

Решение системы уравнений по формулам Крамера:

$$x = \frac{-123}{-41} = 3, \quad y = \frac{-164}{-41} = 4, \quad z = \frac{-82}{-41} = 2 .$$

**б) с помощью обратной матрицы**

Данную систему линейных алгебраических уравнений запишем в матричной форме. Обозначим через **А** – матрицу коэффициентов при неизвестных; **X**-матрицу-столбец неизвестных x,y,z; **B**-матрицу-столбец свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 29 \\ 25 \\ -16 \end{pmatrix} \quad .$$

Левую часть системы уравнений можно записать в виде произведения **А·Х**. Следовательно, данную систему уравнений можно представить матричным уравнением **А·Х=В.** Если матрица **А** невырожденная (т.е. определитель составленный из элементов матрицы **А** отличен от нуля, $\Delta_A \neq 0$), то матрица А имеет единственную обратную матрицу $A^{-1}$. Умножив обе части равенства $A \cdot X = B$ на матрицу $A^{-1}$ слева**,** получим $\mathbf{A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B}$ . Так как $\mathbf{A^{-1} \cdot A = E}$ , где **Е** - единичная матрица, тогда матричная запись решения системы линейных уравнений $\mathbf{X = A^{-1} \cdot B}$ **.**

Обратная матрица определяется формулой

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \quad ,$$

где $A_{ij}$ (i=1,2,3; j=1,2,3) – алгебраические дополнения элементов $a_{ij}$ в определителе матрицы **А.** Алгебраические дополнения являются произведением $(-1)^{i+j}$ на минор $M_{ij}$ второго порядка $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ .

Минором $M_{ij}$ является определитель на порядок меньший, получаемый вычерчиванием i-й строки и j-го столбца в определителе матрицы **А**.

Вычислим определитель $\Delta_A$ любым способом, например разложением определителя по элементам первой строки:

$$\Delta_A=\begin{vmatrix}3&4&2\\1&5&1\\2&-4&-3\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}5&1\\-4&-3\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}1&1\\2&-3\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1&5\\2&-4\end{vmatrix}=3(-15+4)-4(-3-2)+2(-4-10)=$$
$$=-33+20-28=-41\neq 0.$$

Матрица **A** невырожденная, т.к. $\Delta_A$= - 41≠0, следовательно матрица **A** имеет обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$ .

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5&1\\-4&-3\end{vmatrix}=-15+4=-11 \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&1\\2&-3\end{vmatrix}=-(-3-2)=5$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&5\\2&-4\end{vmatrix}=-4-10=-14 \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}4&2\\-4&-3\end{vmatrix}=-(-12+8)=4$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3&2\\2&-3\end{vmatrix}=-9-4=-13 \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3&4\\2&-4\end{vmatrix}=-(-12-8)=20$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}4&2\\5&1\end{vmatrix}=4-10=-6 \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3&2\\1&1\end{vmatrix}=-(3-2)=-1$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3&4\\1&5\end{vmatrix}=15-4=11$$

Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы **A**:

Запишем обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$

$$A^{-1}=\frac{1}{-41}\begin{pmatrix}-11&4&-6\\5&-13&-1\\-14&20&11\end{pmatrix}$$

Матричное решение системы имеет вид **X= A$^{-1}$ ·B**, т.е.

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-\frac{1}{41}\begin{pmatrix}-11&4&-6\\5&-13&-1\\-14&20&11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}29\\25\\-16\end{pmatrix}=-\frac{1}{41}\begin{pmatrix}(-11)\cdot 29+4\cdot 25+(-6)(-16)\\5\cdot 29+(-13)\cdot 25+(-1)(-16)\\(-14)\cdot 29+20\cdot 25+11(-16)\end{pmatrix}=-\frac{1}{41}\begin{pmatrix}-123\\-164\\-82\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}.$$

Таким образом x=3; y=4; z=2.

**в) методом Гаусса.**

Метод Гаусса состоит в последовательном исключении неизвестных в системе уравнений. Элементарными преобразованиями приводят исходную СЛАУ к эквивалентной СЛАУ простейшего вида. При решении методом Гаусса расширенную матрицу системы уравнений элементарными преобразованиями приводят к треугольному виду.

Запишем расширенную матрицу данной СЛАУ. Выполним следующие преобразования:

1) поменяем строки местами;

2) от элементов 2-ой строки вычтем удвоенные элементы 1-ой строки; от элементов 3-ей строки вычтем элементы 1-ой строки, умноженные на 3;

3) элементы 2-ой и 3-ей строки разделим на (-1);

4) от элементов 3-ей строки, умноженных на 14, вычтем элементы 2-ой строки, умноженные на 11;;

4) элементы 3-ей строки разделим на (-41).

Далее, из 3-ей строки найдем значение z. Подставляя z во 2-ую строку, находим значение y. Подставляя z и y в 1-ую строку, находим значение x:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 29 \\ 1 & 5 & 1 & 25 \\ 2 & -4 & -3 & -16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 25 \\ 2 & -4 & -3 & -16 \\ 3 & 4 & 2 & 29 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ II-2I \\ III-3I \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 25 \\ 0 & -14 & -5 & -66 \\ 0 & -11 & -1 & -46 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ :(-1) \\ :(-1) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 25 \\ 0 & 14 & 5 & 66 \\ 0 & 11 & 1 & 46 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ 14III-11II \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 25 \\ 0 & 14 & 5 & 66 \\ 0 & 0 & -41 & -82 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ :(-41) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 25 \\ 0 & 14 & 5 & 66 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Из 3-ей строки следует, z=2. Из 2-ой строки 14y+ 5z = 66; 14y = 66 – 10 или 14y = 56, отсюда y = 4. Из 1-ой строки x+5y+ z = 25; x = 25-20-2 = 3; x = 3

Таким образом x=3; y=4; z=2.

**Разберите решение задачи 3.**

**Найти общее решение однородной системы линейных уравнений и проанализировать его структуру (указать базис пространства решений однородной системы, установить размерность пространства):**

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0 \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

**Решение:**

Множество решений однородной СЛАУ является подпространством линейного пространства и обозначается (ker A). Размерность этого подпространства определяют по формуле: dim(ker A) = n – r, где n – количество неизвестных в однородной СЛАУ, r – ранг матрицы А. В нашем случае n =5. Необходимо найти ранг матрицы. Запишем матрицу коэффициентов СЛАУ и найдем ее ранг методом элементарных преобразований:

1) поменяем местами строки;
2) от элементов 2-ой строки вычтем элементы 1-ой строки, умноженной на 6; от элементов 3-ей строки вычтем элементы 1-ой строки, умноженной на 7;
3) от элементов 3-ей строки вычитаем элементы 2-ой, получаем нулевую строку и вычеркиваем ее

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 3 & -2 & 4 & 7 & 0 \\ 7 & 4 & -3 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & -2 & 4 & 7 & 0 \\ 7 & 4 & -3 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ II-6I \\ III-7I \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 16 & 25 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 16 & 25 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 16 & 25 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы А равен числу ненулевых строк. Таким образом, r=2.

dim(ker A) = n – r=5-2=3. Т.е., линейное подпространство решений данной однородной СЛАУ имеет размерность 3. Следовательно, имеется три линейно независимых решения, которые образуют фундаментальную систему решений (ФСР) данной однородной СЛАУ. Решим укороченную систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ -3x_2 + 4x_3 + 16x_4 + 25x_5 = 0 \end{cases}$$

Выберем в качестве базисного минора $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$, также ранг полученной расширенной матрицы равен 2, тогда выберем два базисных неизвестных, например, $x_1$ и $x_2$. Оставшиеся $x_3$, $x_4$, $x_5$ будут свободными неизвестными. В укороченной системе базисные неизвестные перенесем в левую часть, а свободные неизвестные – в правую часть равенств.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\ 3x_2 = 4x_3 + 16x_4 + 25x_5 \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим $x_2 = \frac{4}{3}x_3 + \frac{16}{3}x_4 + \frac{25}{3}x_5$.Подставляя найденное значение $x_2$ в первое уравнение, найдем $x_1$:

$x_1 = -\frac{1}{3}x_3 - \frac{10}{3}x_4 - \frac{16}{3}x_5$.

Базисные решения получим, если свободным неизвестным будем придавать поочередно значение 1, полагая остальные равными 0.

При $x_3$=1, $x_4$=0, $x_5$=0, получим $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = \frac{4}{3}$.

При $x_3$=0, $x_4$=1, $x_5$=0, получим $x_1 = -\frac{10}{3}, x_2 = \frac{16}{3}$.

При $x_3$=0, $x_4$=0, $x_5$=1, получим $x_1 = -\frac{16}{3}, x_4 = \frac{25}{3}$.

Запишем базис линейного пространства решений однородной СЛАУ – фундаментальную систему решений:

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} \\ \frac{16}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{16}{3} \\ \frac{25}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Размерность линейного пространства решений однородной СЛАУ равна 3.

Базис: $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

## Вопросы для самопроверки

1. Напишите формулы Крамера решения системы линейных уравнений. В каких случаях система уравнений имеет а) единственное решение; б)бесчисленное множество решений; в)не имеет решения. В каких случаях можно использовать формулы Крамера.
1. Объясните схему решения системы линейных уравнений по методу Гаусса.
2. Какая матрица называется обратной по отношению к данной матрице? Напишите формулу обратной матрицы.
3. Что называется рангом матрицы? Как его найти?
4. Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли.
5. Опишите матричный способ решения системы линейных уравнений.
6. Опишите алгоритм решения системы уравнений методом Гаусса.
7. Какая система уравнений называется однородной?
8. Какие решения образуют фундаментальную систему?

## Задания для самостоятельного решения

**В задачах 1-20 систему линейных алгебраических уравнений решить:**

**а) по формулам Крамера;**
**б) с помощью обратной матрицы;**
**в) методом Гаусса.**

1. $\begin{cases} 3x-2y-z=4 \\ x+3y-z=2 \\ 2x-3y+2z=0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x+7y-z=13 \\ x+2y+z=5 \\ 3x-5y+3z=-7 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ 3x-5y+2z=-11 \\ 5x+2y-2z=-3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x-3y+2z=9 \\ 2x+5y-3z=4 \\ 5x+6y-2z=18 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x+3y-2z=4 \\ x-2y-5z=-9 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x+5y+z=-8 \\ 2x-3y+5z=16 \\ 5x+2y-z=-6 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 2x+3y-z=4 \\ 3x+y-4z=2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x-2y+3z=9 \\ 3x+2y+2z=-2 \\ x+4y+3z=5 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x+3y+2z=-5 \\ 3x+4y-4z=5 \\ 2x-2y+3z=-8 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 3x+2y+3z=8 \\ 2x+4y-z=0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x+4y-z=0 \\ x+5y+z=3 \\ 2x-3y+3z=8 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x+3y+2z=10 \\ x+2y-3z=3 \\ 3x+4y+z=12 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x+y=-1 \\ 3x-2y+z=0 \\ 5x-8y+9z=3 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 4x-3y+2z=-8 \\ 2x+5y-3z=13 \\ 5x+6y-2z=14 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 4x+3y-2z=-14 \\ x-2y-5z=2 \\ -x+3y-2z=1 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x+2y+z=8 \\ -2x+3y-3z=-5 \\ 3x-4y+5z=10 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x+3y-2z=8 \\ 3x-2y+3z=-1 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x+4y-z=-9 \\ 3x-4y+3z=11 \\ x+3y+z=-5 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x-2y-z=5 \\ 3x+4y-2z=13 \\ -2x+y=-6 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x+y+z=-2 \\ 3x+4y+3z=-5 \\ 2x-3y-z=-6 \end{cases}$

**В задачах 21–40 найти общее решение однородной системы линейных уравнений и проанализировать его структуру (указать базис пространства решений однородной системы, установить размерность пространства):**

21. $\begin{cases} 3x_1+x_2-4x_3+2x_2+x_5=0 \\ 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0 \\ x_1+11x_2+34x_4-5x_5=0 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x_1+x_2-8x_3+2x_4+x_5=0 \\ x_1+11x_2-12x_3-34x_4-5x_5=0 \\ x_1-5x_2+2x_3-16x_4+3x_5=0 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x_1-x_2-5x_3-3x_4+x_5=0 \\ 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0 \\ x_1+x_2-2x_3+4x_4-x_5=0 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1+x_2+10x_3+x_4-x_5=0 \\ 5x_1-2x_2+8x_3-2x_4+2x_5=0 \\ 3x_1-4x_2-12x_3-4x_4+4x_5=0 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1+10x_2-3x_3-2x_4-x_5=0 \\ 2x_1-x_2+3x_3-x_4+x_5=0 \\ 4x_1+19x_2-3x_3-5x_4-x_5=0 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+4x_4+x_5=0 \\ 2x_1+2x_2+3x_3-5x_5=0 \\ x_1+3x_2-x_3-x_4-x_5=0 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1+4x_2-3x_3-2x_4-5x_5=0 \\ 5x_1-x_2+3x_3-4x_4-x_5=0 \\ 3x_1+x_2-3x_5=0 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1+5x_2-x_3+x_4+2x_5=0 \\ 2x_1-x_2-x_3-x_4-x_5=0 \\ x_1+16x_2-2x_3+4x_4+7x_5=0 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ x_1+3x_2-x_3+x_4-x_5=0 \\ 3x_1+x_2+2x_4=0 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-10x_4+x_5=0 \\ x_1+2x_2-3x_3+10x_4-x_5=0 \\ x_1+6x_2-9x_3+30x_4-3x_5=0 \end{cases}$

31. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5=0 \\ x_1+x_2+2x_3-x_4+x_5=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3=0 \end{cases}$

32. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+3x_3-3x_4-x_5=0 \\ x_1+6x_2-x_3+x_4+2x_5=0 \\ x_1+16x_2-6x_3+6x_4+7x_5=0 \end{cases}$

33. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

34. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 6x_3 - 4x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$

35. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$

36. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$

37. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 - x_5 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 30x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$

38. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 7x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$

39. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

40. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

## 2.3. Векторная алгебра и аналитическая геометрия в пространстве

Литература: [1] гл.3, §3.1; [2] гл.1, §1.1-1.3;гл.9, [3] гл.2, §5-8, гл.4; [4] гл.4; [5] гл.2; [6] гл.4, §1.

**Разберите решение задачи 4.**

**Вычислить объем тетраэдра (пирамиды) с вершинами $A_1(2;3;1)$, $A_2(4;1;-2)$, $A_3(6;3;7)$, $A_4(-5;-4;8)$, его высоту, опущенную из вершины $A_4$ на грань $A_1A_2A_3$. Определить угол между гранями $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$.**

**Решение**. Из вершины $A_1$ проведем векторы $\overline{A_1A_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}=$

$\{4-2;1-3;-2-1\}$. Имеем $\overline{A_1A_2}=\{2;-2;-3\}$. $\overline{A_1A_3}=\{4;0;6\}$. $\overline{A_1A_4}=\{-7;-7;7\}$.
Вычисляем смешанное произведение векторов

$$\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}\cdot\overline{A_1A_4}= \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} =308$$

и вычисляем объем тетраэдра по формуле

$V_{\text{тетр.}}=(1/6)V_{\text{пар.}}=(1/6)(\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}\cdot\overline{A_1A_4})$,
где $V_{\text{тетр}}$ и $V_{\text{пар}}$ – объемы тетраэдра и параллелепипеда, построенных на

векторах $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$ .

Итак объем тетраэдра $V_{\text{тетр.}}=(1/6)V_{\text{пар}} = 308/6=154/3$ (куб. единиц объема).
С другой стороны $V_{\text{тетр.}}=(1/3)\, S_{\Delta(A_1A_2A_3)}\cdot H$, (2)

где $S_{\Delta(A_1A_2A_3)}=(1/2)\,|\,\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}\,|$.
Сравнивая формулы (1) и (2), получим

$$H=\frac{3V_{\text{тетр.}}}{S_{\Delta A_1A_2A_3}}=\frac{\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}\cdot\overline{A_1A_4}}{|\;\overline{A_1A_2}x\overline{A_1A_3}\;|} \qquad (3)$$

Для определения высоты H тетраэдра необходимо вычислить модуль векторного произведения. Вычисляем координаты векторного произведения

$$\overline{A_1A_2}x\overline{A_1A_3}=\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ 2 & -2 & 3\\ 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=-12\bar i-24\bar j+8\bar k=\{-12;-24;8\}\quad .$$

и его модуль

$$\left|\overline{A_1A_2}x\overline{A_1A_3}\right|=\sqrt{(-12)^2+(-24)^2+8^2}=28$$

Находим высоту H по формуле (3)

H=308/28=11 (ед. длины)

Для определения угла между плоскостями необходимо записать координаты нормальных векторов к этим плоскостям, затем определить косинус угла по формуле

$$\cos\varphi=\frac{\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}}{\left|\overline{n_1}\right|\cdot\left|\overline{n_2}\right|} \qquad (4)$$

*или* $$cos\varphi=\frac{\left|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \qquad (5)$$

Высота H является нормальным вектором к плоскости треугольника $A_1A_2A_3$.

Координаты вектора $\overline{n_1}=\{-12;-24;8\}$ .

Запишем уравнение плоскости $A_1A_2A_4$, как уравнение плоскости, проходящей через 3 точки:

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1\end{vmatrix}=0$$

Подставим координаты точек $A_1$, $A_2$, $A_4$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 4-2 & 1-3 & -2-1 \\ -5-2 & -4-3 & 8-1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 2 & -2 & -3 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Разложим определитель по элементам 1 строки:

(x-2)(-14-21) - (y-3)(14-21) + (z-1)(-14-14) = 0

(x-2)(-35) + (y-3)7 + ( z-1)(-28) = 0

-35x+7y-28z+77 = 0

или 5x-y+4z-11=0

В качестве нормального вектора плоскости $A_1A_2A_4$ можно взять

нормальный вектор $\bar{n}_2$={5;-1;4} .

Острый угол между плоскостями определим по формуле (4)

$$\cos\varphi = \frac{|(-12)\cdot 5 + (-24)(-1) + 8\cdot 4|}{\sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2}\sqrt{5^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \frac{|-60+24+32|}{28\sqrt{42}} = \frac{4}{28\sqrt{42}} = \frac{\sqrt{42}}{7\cdot 42} = \frac{\sqrt{42}}{294}$$

$$\varphi = \arccos\frac{\sqrt{42}}{294} \approx 12^o.$$

## Вопросы для самопроверки

1. Какие величины называются скалярными? векторными?
2. Какие векторы называются коллинеарными?
3. Какие два вектора называются равными?
4. Как сложить два вектора? Как их вычесть?
5. Как найти координаты вектора по координатам точек его начала и конца?
6. Назовите правила сложения, вычитания векторов, заданных в координатной форме.
7. Дайте определение скалярного произведения двух векторов. Перечислите основные свойства скалярного произведения.
8. Как найти скалярное произведение двух векторов по их координатам?
9. Напишите формулу для определения угла между двумя векторами.
10. Напишите условия: коллинеарности двух векторов; их перпендикулярности.
11. Напишите формулы длины вектора, расстояния между двумя точками в декартовой системе координат.
12. Дайте определение векторного произведения двух векторов, его свойства, выражение через координаты перемножаемых векторов.
13. Дайте определение смешанного произведения трёх векторов, его свойства, выражение через координаты перемножаемых векторов.

### Задания для самостоятельного решения

**Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ и его высоту, опущенную из вершины $A_4$ на грань $A_1A_2A_3$. Определить угол между гранями $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$. Составить уравнение плоскости, проходящей через вершину $A_3$, параллельной грани $A_1A_2A_4$.**

1. $A_1(-2;0;4)$, $A_2(-1;7;1)$, $A_3(4;-8;-4)$, $A_4(1;-4;6)$.
2. $A_1(0;-1;-1)$, $A_2(-2;3;5)$, $A_3(1;-5;-9)$, $A_4(-1;-6;3)$.
3. $A_1(5;2;0)$, $A_2(2;5;0)$, $A_3(1;2;4)$, $A_4(-1;1;1)$.
4. $A_1(-1;2;-3)$, $A_2(4;-1;0)$, $A_3(2;1;-2)$, $A_4(3;4;5)$.
5. $A_1(1;2;0)$, $A_2(1;-1;2)$, $A_3(0;1;-1)$, $A_4(-3;0;1)$.
6. $A_1(-3;4;-7)$, $A_2(1;5;-4)$, $A_3(-5;-2;0)$, $A_4(2;5;4)$.
7. $A_1(2;-1;2)$, $A_2(1;2;-1)$, $A_3(3;2;1)$, $A_4(-4;2;5)$.
8. $A_1(-4;2;6)$, $A_2(2;-3;0)$, $A_3(-10;5;8)$, $A_4(-5;2;-4)$.
9. $A_1(1;3;6)$, $A_2(2;2;1)$, $A_3(-1;0;1)$, $A_4(-4;6;-3)$.

0. $A_1(4;-1;3)$, $A_2(-2;1;0)$, $A_3(0;-5;1)$, $A_4(3;2;-6)$.

11. $A_1(2;-4;-3)$, $A_2(5;-6;0)$, $A_3(-1;3;-3)$, $A_4(-10;-8;7)$.
12. $A_1(0;-3;1)$, $A_2(-4;1;2)$, $A_3(2;-1;5)$, $A_4(3;-1;5)$.
13. $A_1(1;2;-3)$, $A_2(1;0;1)$, $A_3(-2;-1;6)$, $A_4(0;-5;-4)$.
14. $A_1(-1;2;4)$, $A_2(-1;-2;-4)$, $A_3(3;0;-1)$, $A_4(7;-3;1)$.
15. $A_1(1;2;0)$, $A_2(3;0;-3)$, $A_3(5;2;6)$, $A_4(8;4;-9)$.
16. $A_1(1;1;-1)$, $A_2(2;3;1)$, $A_3(3;2;1)$, $A_4(5;9;-8)$.
17. $A_1(2;1;4)$, $A_2(-1;5;-2)$, $A_3(-7;-3;2)$, $A_4(-6;-3;6)$.
18. $A_1(3;10;-1)$, $A_2(-2;3;-5)$, $A_3(-6;0;-3)$, $A_4(1;-1;2)$.
19. $A_1(1;-1;2)$, $A_2(2;1;2)$, $A_3(1;1;4)$, $A_4(6;-3;8)$.
20. $A_1(7;2;4)$, $A_2(7;-1;-2)$, $A_3(3;3;1)$, $A_4(-4;2;1)$.

### 2.4. Линейные (векторные) пространства

Литература: [1] гл.2, §3.2-3.9; [2] гл.1,§ 1.4-1.6; гл.5-6; [4] гл.3; [5] гл.5; [6] гл.10, §1-6.

**Разберите решение задачи 5.**

**Выяснить, образуют ли базис векторы $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3$. Если образуют, то разложить вектор $\overline{x}$ по этому базису:**

$$\overline{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{x}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}, \overline{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

**Решение:**

Проверим, образуют ли базис векторы $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3$. Составим определитель из координат векторов и вычислим его. Если определитель не равен нулю, то векторы образуют базис; Если определитель равен нулю, то векторы не образуют базис.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = (6-5) - (-6+3) = 1 + 3 = 4 \neq 0,$$ следовательно

векторы $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3$ образуют базис и вектор $\overline{x}$ может быть разложен в этом базисе.

Представим вектор $\overline{x}$ в виде разложения в базисе $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3$:

$$\overline{x} = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3.$$

Подставим координаты векторов:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 4 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 5\lambda_3 = -4 \\ \qquad \lambda_2 - 6\lambda_3 = 5 \end{cases}$$

Решим систему уравнений методом Гаусса. Составим расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -6 & 5 \end{array}\right) II-I \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 10 & -2 & 8 & -8 \\ 0 & 1 & -6 & 5 \end{array}\right)_{2III+II} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

Записываем систему уравнений: $\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2-3\lambda_3=4 \\ -2\lambda_1-\lambda_2=-8 \\ \quad -4\lambda_3=2 \end{cases}$. Выполнив обратный шаг, получаем: $\lambda_3=-0{,}5;\ \lambda_2=2;\ \lambda_1=0{,}5$. Т.о., разложение вектора по базису имеет вид: $\bar{x}=0{,}5\bar{x}_1+2\bar{x}_2-0{,}5\bar{x}_3$.

**Разберите решение задачи 6.**

**Задана матрица А линейного оператора в некотором базисе $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3$. Найти матрицу этого оператора в базисе $\bar{f}_1,\bar{f}_2,\bar{f}_3$.**

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{cases} \bar{f}_1=\bar{e}_1-\bar{e}_2+3\bar{e}_3 \\ \bar{f}_2=4\bar{e}_1+\bar{e}_2-\bar{e}_3 \\ \bar{f}_3=2\bar{e}_1-3\bar{e}_2 \end{cases}$$

**Решение:**

Пусть $\tilde{A}$ - линейный оператор, которому в базисе $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ соответствует матрица А, и пусть В – матрица того же оператора А в базисе $\{\bar{f}_1,\bar{f}_2,\bar{f}_3\}$. Если С – матрица перехода от базиса $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ к базису $\{\bar{f}_1,\bar{f}_2,\bar{f}_3\}$, то справедливо равенство: $B=C^{-1}AC$. Матрица перехода от базиса $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ к базису $\{\bar{f}_1,\bar{f}_2,\bar{f}_3\}$ имеет вид:

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную ей матрицу $C^{-1}$ по формуле:

$$C^{-1}=\frac{1}{\Delta_C}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}.$$

Имеем $\Delta_C = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 - 36 - 6 - 0 - 3 = -43 \neq 0$. Следовательно, обратная матрица существует. Найдем алгебраические дополнения:

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3, \quad C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -14,$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9, \quad C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6, \quad C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 13, \quad C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

Искомая обратная матрица:

$$C^{-1} = -\frac{1}{43}\begin{pmatrix} -3 & -2 & -14 \\ -9 & -6 & 1 \\ -2 & 13 & 5 \end{pmatrix}.$$

Матрица B оператора A B базисе $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$ равна:

$$B = C^{-1}AC = -\frac{1}{43}\begin{pmatrix} -3 & -2 & -14 \\ -9 & -6 & 1 \\ -2 & 13 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{43}\begin{pmatrix} 18 & -37 & -3 \\ 11 & -25 & 34 \\ 12 & 47 & -45 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{43}\begin{pmatrix} 46 & 38 & 147 \\ 138 & -15 & 97 \\ -170 & 140 & -117 \end{pmatrix}.$$

**Разберите решение задачи 7.**

**Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\tilde{A}$ (матрицы A):**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

**Решение:** Составим характеристическое уравнение:

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -8 \\ -4 & 7-\lambda & -4 \\ -8 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Выполним преобразования: от элементов 3-го столбца вычтем элементы 1-го столбца; к элементам 3-ей строки прибавим элементы 1-ой строки, затем разложим определитель по элементам 1-ой строки:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -8 \\ -4 & 7-\lambda & -4 \\ -8 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & \lambda-9 \\ -4 & 7-\lambda & 0 \\ -8 & -4 & -\lambda+9 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ \\ III-I \end{array} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & \lambda-9 \\ -4 & 7-\lambda & 0 \\ -\lambda-7 & -8 & 0 \end{vmatrix} =$$

III-I

$$=(\lambda-9)\begin{vmatrix} -4 & 7-\lambda \\ -(\lambda+7) & -8 \end{vmatrix} = (\lambda-9)[32+(7-\lambda)(7+\lambda)] = (\lambda-9)[32+49-\lambda^2] =$$

$$=(\lambda-9)[81-\lambda^2] = -(\lambda-9)[\lambda^2-81].$$

Решая уравнение, получаем $-(\lambda-9)(\lambda^2-81)=0$ или $(\lambda-9)(\lambda^2-81)=0$, откуда $(\lambda-9)=0$; $\lambda_1=9$ и $\lambda^2-81=0$; $\lambda_2=9$; $\lambda_3=-9$.

Собственные значения оператора $\tilde{A}$ (матрицы А)

$\lambda_1=\lambda_2=9$; $\lambda_3=-9$.

Найдем собственный вектор $\bar{X}^{(1)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_1=\lambda_2=9$:

$$(A-9E)\bar{X}=0 \text{ или } \begin{pmatrix} -8 & -4 & -8 \\ -4 & -2 & -4 \\ -8 & -4 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Исследуем и решим полученную систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} -8x_1-4x_2-8x_3=0 \\ -4x_1-2x_2-4x_3=0 \\ -8x_1-4x_2-84_3=0 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу и проведем преобразования:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -8 & -4 & -8 & 0 \\ -4 & -2 & -4 & 0 \\ -8 & -4 & -8 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} :(-4) \\ :(-2) \\ :(-4) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ II-I \\ III-I \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ранг полученной матрицы равен рангу ее расширенной матрицы и равен 1. Выберем столько базисных неизвестных, каков ранг матрицы, например, $x_1$. Тогда $x_2$ и $x_3$ свободные неизвестные. Полагая $x_2=c_1$, $x_3=c_2$, найдем $x_1$:

$2x_1= - x_2 – 2x_3$ или $2x_1 = - c_1 – 2c_2$, тогда $x_1 = -\frac{1}{2}c_1 - c_2$. Отсюда найдем вектор $\bar{x}^{(1)} = (-\frac{1}{2}c_1 - c_2; c_1; c_2)$, который есть собственный вектор оператора $\tilde{A}$ (матрицы А) с собственными значением $\lambda_1= \lambda_2=9$. Аналогично находим вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_3= - 9$: $\bar{x}^{(2)} = (c_3; \frac{1}{2}c_3; c_3)$.

**Разберите решение задачи 8.**

**Задана квадратичная форма** $A = x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$

1) **найти матрицу А квадратичной формы в каноническом базисе (в матричном виде);**
2) **привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа (к сумме квадратов соответствующих координат выделением полных квадратов);**
3) **доказать, что квадратичная форма А положительно или отрицательно определенная.**

**Решение:**

***Квадратичной формой*** $A(x_1, x_2, x_3)$ от n переменных называется сумма, каждый член которой является либо квадратом одной из переменных, либо произведением двух разных переменных, взятых с некоторым коэффициентом.

**1)** Найдем матрицу квадратичной формы. Ее диагональные элементы равны коэффициентам при квадратах переменных, т.е. $a_{11}=1$, $a_{22}=0$, $a_{33}=1$, а другие элементы – половинам соответствующих коэффициентов квадратичной формы, т.о., $a_{12}=a_{21}$, $2a_{12} = -3$, $a_{12}=a_{21}=-1{,}5$; $a_{13}=a_{31}$, $2a_{13}=4$, $a_{13}=a_{31}=2$; $a_{23}=a_{32}$, $2a_{23}=2$, $a_{23}=a_{32}=1$. Следовательно, матрица А квадратичной формы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1{,}5 & 2 \\ -1{,}5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**2)** Приведем квадратичную форму к каноническому виду. Вначале выделим полный квадрат при переменной $x_1$, коэффициент при квадрате которой отличен от нуля:

$$A=\left[x_1^2-2x_1\left(\frac{1}{2}\left(3x_2-4x_3\ \right)\ \right)+\left(\frac{1}{2}\left(3x_2-4x_3\ \right)\right)^2\ \right]-\left(\frac{1}{2}\left(3x_2-4x_3\right)\right)^2+2x_2x_3+x_3^2=$$

$$=\left(x_1-\frac{3}{2}x_2+2x_3\right)^2-\frac{9}{4}x_2^2+6x_2x_3-4x_3^2+2x_2x_3+x_3^2=\left(x_1-\frac{3}{2}x_2+2x_3\right)^2-\frac{9}{4}x_2^2+8x_2x_3-3x_3^2.$$

Теперь выделяем полный квадрат при переменной $x_2$, коэффициент при которой отличен от нуля:

$$A=\left(x_1-\frac{3}{2}x_2+2x_3\right)^2-\frac{9}{4}\left(x_2^2-\frac{32}{9}x_2x_3+\frac{256}{81}x_3^2\right)+\frac{9}{4}\cdot\frac{256}{81}x_3^2-3x_3^2=$$

$$=\left(x_1-\frac{3}{2}x_2+2x_3\right)^2-\frac{9}{4}\left(x_2-\frac{16}{9}x_3\right)^2+\frac{37}{9}x_3^2.$$

Итак, невырожденное линейное преобразование

$y_1=x_1-\frac{3}{2}x_2+2x_3,\qquad y_2=x_2-\frac{16}{9}x_3,\qquad y_3=x_3$ приводит квадратичную форму к каноническому виду:

$$A(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-\frac{9}{4}y_2^2+\frac{37}{9}y_3^2.$$

3)Для установления знакоопределенности квадратичной формы применяют критерий Сильвестра:

Для того, чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы были положительны, т.е.

$$\Delta_1=|a_{11}|>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}>0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}>0,\ldots,\quad \Delta_n>0.$$

Для отрицательно определенных квадратичных форм знаки главных миноров чередуются, начиная со знака «минус» для минора первого порядка, т.е. $\Delta_1<0,\quad \Delta_2>0,\quad \Delta_3<0$. Т.о. .миноры нечетного порядка отрицательны, четного порядка – положительны.

Для неопределенных квадратичных форм знаки главных миноров принимают как положительные, так и отрицательные значения.

Матрица А квадратичной формы имеет вид:

$$\begin{pmatrix}1 & -1{,}5 & 2\\ -1{,}5 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Главные миноры матрицы А:

$$\Delta_1 = |a_{11}| = 1 > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1,5 \\ -1,5 & 0 \end{vmatrix} = -2,25 < 0, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1,5 & 2 \\ -1,5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -9,25 < 0,$$

следовательно, данная квадратичная форма неопределенная.

Для того, чтобы квадратичная форма была положительно (отрицательно) определенной, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения $\lambda_i$ матрицы А были положительны (отрицательны). Рассмотрим на примере.

**Разберите решение задачи 9.**

Доказать, что квадратичная форма $A = 13x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2$ положительно определенная

**Решение:**

*Первый способ.* Матрица А квадратичной формы имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

Характеристическое уравнение матрицы А:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 13-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 18\lambda + 56 = 0$$

Решая уравнение, получим $\lambda_1 = 14, \lambda_2 = 4$. Т.к. корни характеристического уравнения матрицы А положительны, то данная квадратичная форма положительна.

*Второй способ.* Так как главные миноры матрицы А

$\Delta_1 = |a_{11}| = 13 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 56 > 0$ положительны, то по критерию Сильвестра данная квадратичная форма положительно определенная.

## Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение n-мерного линейного векторного пространства.
2. Понятие линейная зависимости и независимости векторов линейного пространства.
3. Размерность и базис линейного пространства.
4. Переход к новому базису. Как найти матрицу перехода?

5. Дайте определение линейного подпространства. Как найти сумму и пересечение линейных подпространств?
6. Дайте понятие линейных отображений.
7. Дайте понятие линейных операторов
8. Как найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора?
9. Дайте понятие квадратичной формы.
10. Назовите алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду.
11. Как применить критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы?

**Задания для самостоятельного решения**

**В задачах 1-20 выяснить, образуют ли базис векторы $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3$. Если образуют, то разложить вектор $\overline{x}$ по этому базису:**

1. $\overline{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \overline{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overline{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

2. $\overline{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overline{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

3. $\overline{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{x}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

4. $\overline{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overline{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \overline{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. $\overline{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \overline{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overline{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$

6. $\overline{x}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \overline{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \overline{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

7. $\overline{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \overline{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

8. $\overline{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \overline{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \overline{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

9. $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{x}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

10. $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

11. $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \bar{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix}$

12. $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

13. $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$

14. $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \bar{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

15. $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \bar{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -14 \end{pmatrix}$

16. $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \bar{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$

17. $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$

18. $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \bar{x} = \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 18 \end{pmatrix}$

19. $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{x}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$20.\ \bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \bar{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**В задачах 21-40 задана матрица А линейного оператора в некотором базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Найти матрицу этого оператора в базисе $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$.**

$$21.\ A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{cases} \bar{f}_1 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 3\bar{e}_3 \\ \bar{f}_2 = 4\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3 \\ \bar{f}_3 = 2\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 \end{cases}$$

$$22.\ A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{cases} \bar{f}_1 = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 4\bar{e}_3 \\ \bar{f}_2 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 - 2\bar{e}_3 \\ \bar{f}_3 = \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 \end{cases}$$

$$23.\ A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{cases} \bar{f}_1 = 3\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3 \\ \bar{f}_2 = -\bar{e}_1 - \bar{e}_3 \\ \bar{f}_3 = -\bar{e}_1 + 4\bar{e}_2 + \bar{e}_3 \end{cases}$$

$$24.\ A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{cases} \bar{f}_1 = -2\bar{e}_1 + \bar{e}_3 \\ \bar{f}_2 = -2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 \\ \bar{f}_3 = -2\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3 \end{cases}$$

$$25.\ A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{cases} \bar{f}_1 = -2\bar{e}_2 - \bar{e}_3 \\ \bar{f}_2 = 2\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3 \\ \bar{f}_3 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 \end{cases}$$

$$26.\ A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \begin{cases} \bar{f}_1 = 3\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 + \bar{e}_3 \\ \bar{f}_2 = -\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 \\ \bar{f}_3 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - 3\bar{e}_3 \end{cases}$$

$$27.\ A=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{cases} \bar{f}_1 = 2\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - 3\bar{e}_3 \\ \bar{f}_2 = -\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 \\ \bar{f}_3 = 3\bar{e}_2 + \bar{e}_3 \end{cases}$$

$$28.\ A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{cases} \bar{f}_1 = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_3 \\ \bar{f}_2 = -2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 \\ \bar{f}_3 = 2\bar{e}_1 + 4\bar{e}_2 - 2\bar{e}_2 \end{cases}$$

29. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} \bar{f}_1 = 3\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 \\ \bar{f}_2 = \bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 \\ \bar{f}_3 = 4\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \end{cases}$

30. $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} \bar{f}_1 = \bar{e}_1 - 4\bar{e}_2 + \bar{e}_3 \\ \bar{f}_2 = -\bar{e}_2 + \bar{e}_3 \\ \bar{f}_3 = -2\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3 \end{cases}$

31. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} \bar{f}_1 = -\bar{e}_1 - \bar{e}_2 - 2\bar{e}_3 \\ \bar{f}_2 = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 4\bar{e}_3 \\ \bar{f}_3 = 2\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 \end{cases}$

32. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -4 & -1 & 1 \\ 10 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} \bar{f}_1 = -2\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3 \\ \bar{f}_2 = 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3 \\ \bar{f}_3 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 - 4\bar{e}_3 \end{cases}$

33. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & 8 & -7 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} \bar{f}_1 = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3 \\ \bar{f}_2 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \\ \bar{f}_3 = -4\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 \end{cases}$

34. $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} \bar{f}_1 = 2\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3 \\ \bar{f}_2 = -5\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 3\bar{e}_3 \\ \bar{f}_3 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 \end{cases}$

35. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} \bar{f}_1 = 2\bar{e}_1 - 2\bar{e}_3 \\ \bar{f}_2 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 \\ \bar{f}_3 = -3\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3 \end{cases}$

36. $A=\begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} \bar{f}_1 = -4\bar{e}_1 + \bar{e}_3 \\ \bar{f}_2 = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 \\ \bar{f}_3 = \bar{e}_1 - 4\bar{e}_2 - \bar{e}_3 \end{cases}$

37. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} \bar{f}_1 = \bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 \\ \bar{f}_2 = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \\ \bar{f}_3 = -2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 \end{cases}$

38. $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} \bar{f}_1 = -\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 \\ \bar{f}_2 = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \\ \bar{f}_3 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 \end{cases}$

39. $A=\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{cases} \bar{f}_1 = -\bar{e}_2 - 4\bar{e}_3 \\ \bar{f}_2 = 2\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 \\ \bar{f}_3 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 4\bar{e}_3 \end{cases}$

40. $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{cases} \bar{f}_1 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - 2\bar{e}_3 \\ \bar{f}_2 = 2\bar{e}_1 - 2\bar{e}_{23} \\ \bar{f}_3 = \bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 + \bar{e}_3 \end{cases}$

**В задачах 41-60 найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей А. Привести матрицу А к диагональному виду:**

41. $A=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$ 42. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -5 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ 43. $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

44. $A=\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ 45. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 46. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

47. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 48. $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 49. $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

50. $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 51. $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$ 52. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

53. $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 54. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ 55. $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

56. $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 57. $A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}$ 58. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

59. A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 60. A= $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$

**В задачах 61-80 задана квадратичная форма $A(x_1, x_2, x_3)$:**

1) **найти матрицу А квадратичной формы в каноническом базисе (в матричном виде);**
2) **привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа (к сумме квадратов соответствующих координат выделением полных квадратов);**
3) **доказать, что квадратичная форма А положительно или отрицательно определенная.**

61. $A(x,x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_3^2$

62. $A(x,x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_3^2$

63. $A(x,x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 4x_3^2$

64. $A(x,x) = x_1^2 - 4x_2x_3 + 3x_3^2$

65. $A(x,x) = x_1^2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_3^2$

66. $A(x,x) = x_1^2 + 4x_1x_3 - x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$

67. $A(x,x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_3^2$

68. $A(x,x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + x_3^2$

69. $A(x,x) = 4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_3^2$

70. $A(x,x) = x_1^2 + 4x_1x_3 - x_2^2 - 2x_2x_3 + 4x_3^2$

71. $A(x,x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$

72. $A(x,x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 2x_3^2$

73. $A(x,x) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2^2 + 2x_3^2$

74. $A(x,x) = 4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 4x_3^2$

75. $A(x,x) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 3x_2^2 + 4x_3^2$

76. $A(x,x) = 4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 2x_3^2$

77. $A(x,x) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$

78. $A(x,x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3$

79. $A(x,x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$

80. $A(x,x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 + 6x_2x_3$

## 2.5. Аналитическая геометрия на плоскости.

Литература: [1] гл.4; [2] гл.7-8; [3] гл.3; [4] гл.3; [5] гл.1; [6] гл.4.

**Разберите решение задачи 10.**

**Даны координаты вершин треугольника ABC: A(1,5); B(-4,0); C(4,-4).**

1) **составить уравнения медианы AD, высоты AE;**
2) **найти длину высоты AE и медианы AD;**
3) **определить угол между высотой AE и медианой AD;**
4) **составить уравнение средней линии DM параллельной стороне AC;**
5) **составить уравнение окружности, проходящей через точки A, B, C;**
6) **составить систему линейных неравенств, определяющих треугольник ABC.**

**Решение.**

1. **Уравнение медианы AD** определяем по формуле

$$\frac{x - x_A}{x_D - x_A} = \frac{y - y_A}{y_D - y_A},$$

Где точка D делит отрезок BC пополам.
Координаты точки D:

$$X_D = \frac{X_B + X_C}{2} = \frac{-4+4}{2} = 0$$

$$Y_D = \frac{Y_B + Y_C}{2} = \frac{0-4}{2} = -2,\ \text{D(0; -2)}$$

Тогда, $\frac{y-5}{-2-5} = \frac{x-1}{0-1}$; $y - 5 = 7(x-1)$ или $7x - y - 2 = 0$ (AD)

**Для составления уравнения высоты AE** воспользуемся условием перпендикулярности двух прямых BC и AE: $K_{AE} = -\frac{1}{K_{BC}}$.

Угловой коэффициент прямой BC найдем по координатам точек B и C:

$K_{BC} = \frac{Y_B - Y_C}{X_B - X_C} = \frac{0+4}{-4-4} = -\frac{1}{2}$, тогда $K_{AE} = -\frac{1}{K_{BC}} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2;\quad K_{AE} = 2$.

Составим уравнение высоты АЕ, используя уравнение прямой, проходящей через точку А в заданном направлении:

$y - y_A = K_{AE}(x - x_A);\quad y - 5 = 2(x - 1)$ или $2x - y + 3 = 0$ (АЕ)

**2. Длину высоты АЕ** определяем, используя формулу для определения расстояния точки А (1;5) от прямой ВС:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

где ($x_o$; $y_o$) – координаты точки А (1;5);

А,В,С – коэффициенты уравнения прямой ВС.

Угловой коэффициент прямой ВС $К_{вс} = -\frac{1}{2}$.

Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через точку в заданном направлении:

$y - y_в = К_{вс}(x - x_в)$

$y - 0 = -\frac{1}{2}(x+4)$; 2y=-x-4 или x+2y+4=0.

Отсюда А=1; В=2; С=4.

$$d = \frac{|1 + 2 \cdot 5 + 4|}{\sqrt{1+4}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}.$$

**Длину медианы AD** определим, используя формулу для определения расстояния между двумя точками А и D:

$d = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2} = \sqrt{(1-0)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{2}$.

**3**. **Угол между высотой АЕ и медианой AD** находим, используя формулу

$$tg\varphi = \left|\frac{K_2 - K_1}{1 + K_1 K_2}\right|,$$

где $К_1$ – угловой коэффициент прямой АЕ, $К_1$=2;

$К_2$ – угловой коэффициент прямой AD находим из уравнения 7x-y-2=0, разрешив его относительно y: y=7x-2, отсюда $К_2$=7.

$$tg\varphi = \left|\frac{7 - 2_1}{1 + 7 \cdot 2}\right| = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

$\varphi = arctg\frac{1}{3} = 18^0 27'$.

4. **Средняя линия DM** треугольника ABC проходит через середины сторон BC и AB, т.е. проходит через точки D и M:

$$x_M = \frac{x_B + x_A}{2} = \frac{-4+1}{2} = -\frac{3}{2};$$

$$y_M = \frac{y_B + y_A}{2} = \frac{0+5}{2} = \frac{5}{2}; \qquad \text{M}\left(-\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right).$$

Уравнение средней линии запишем используя уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x - x_D}{x_M - x_D} = \frac{y - y_D}{y_M - y_D}\ ; \qquad \frac{x-0}{-\frac{3}{2}-0} = \frac{y+2}{\frac{5}{2}+2}\ ;$$

9x+3y+6=0 или 3x+y+2=0 (DM).

5. **Уравнение окружности** радиуса R с центром в точке Q ($x_o$;$y_o$) имеет вид: $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2 = R^2$ . так как точки A,B и C лежат на окружности, то их координаты должны удовлетворять этому уравнению:

$$\begin{cases} (1-x_o)^2 + (5-y_o)^2 = R^2 \\ (-4-x_o)^2 + (0-y_o)^2 = R^2 \\ (4-x_o)^2 + (-4-y_o)^2 = R^2 \end{cases}$$

Из первого уравнения вычтем второе уравнение, затем из первого уравнения вычтем третье уравнение. Из полученных уравнений составим систему уравнений:

$$\begin{cases} (1-x_o)^2 - (-4-x_o)^2 + (5-y_o)^2 - (-y_o)^2 = 0 \\ (1-x_o)^2 - (4-x_o)^2 + (5-y_o)^2 - (-4-y_o)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-2x_o + x_o^2 - (16+8x_o + x_o^2 + 25 - 10y_o + y_o^2 - y_o^2 = 0 \\ 1-2x_o + x_o^2 - (16-8x_o + x_o^2) + 25 - 10y_o + y_o^2 - (16+8y_o + y_o^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10x_o - 10y_o + 10 = 0 \\ 6x_o - 18y_o - 6 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_o + y_o - 1 = 0 \\ x_o - 3y_o - 1 = 0 \end{cases}$$

Решаем полученную систему уравнений по формулам Крамера:

$$x_o = \frac{\Delta x_o}{\Delta}; \qquad y_o = \frac{\Delta y_o}{\Delta}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 1 = -4\,; \qquad \Delta x_o = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 1 = -4 \qquad \Delta y_o = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0.$$

Тогда $x_o = \frac{-4}{-4} = 1$;     $y_o = \frac{0}{-4} = 0$.     Q (1;0).

Найдем радиус окружности, подставив найденные значения $x_o=1$ и $y_o=0$ в любое из трех уравнений:

$$(1-1)^2+(5-0)^2=R^2,$$

Отсюда $R^2=25$,    R=5.

Уравнение окружности $(x-1)^2+y^2=25$.

6. **Для составления системы линейных неравенств, определяющих треугольник ABC,** составим уравнения сторон треугольника ABC.

Уравнение стороны AB определим по формуле: $\frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A}$

$\frac{x-1}{-4-1} = \frac{y-5}{0-5}$,   $\frac{x-1}{-5} = \frac{y-5}{-5}$ или $x-1 = y-5$,  $x-y+4=0(AB)$.

Уравнение стороны BC определим по формуле: $\frac{x-x_B}{x_C-x_B} = \frac{y-y_B}{y_C-y_B}$

$\frac{x+4}{4+4} = \frac{y-0}{-4-0}$,   $\frac{x+4}{8} = \frac{y}{-4}$,   $-4(x+4)=8y$,   $x+4=-2y$,  $x+2y+4=0(BC)$.

Уравнение стороны AC определим по формуле: $\frac{x-x_A}{x_C-x_A} = \frac{y-y_A}{y_C-y_A}$

$\frac{x-1}{4-1} = \frac{y-5}{-4-5}$,  $\frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{-9}$,  $-3(x-1)=y-5$,   $-3x+3=y-5$,   $3x+y-8=0(AC)$.

Областью решений неравенства является полуплоскость. Областью решений системы неравенств является треугольник, ограниченный полуплоскостями. Для составления неравенства выбираем произвольную точку, лежащую в какой-либо из полуплоскостей. Лучше выбрать точку начала координат (0;0). Подставляем (0;0) в первое уравнение $x-y+4=0(AB)$, получим $4 \geq 0$, т.е. получаем неравенство $x-y+4 \geq 0$. Аналогично получим $x+2y+4 \geq 0$ и $3x+y-8 \leq 0$.

Таким образом, система линейных неравенств, определяющих треугольник ABC:

$$\begin{cases} x - y + 4 \geq 0 \\ x + 2y + 4 \geq 0 \\ 3x + y - 8 \leq 0 \end{cases}$$

На рис.1 в декартовой прямоугольной системе координат xOy изображены треугольник ABC, медиана AD, высота AE, биссектриса AF и окружность, проходящая через точки A, B, C и система линейных неравенств, определяющих треугольник ABC.

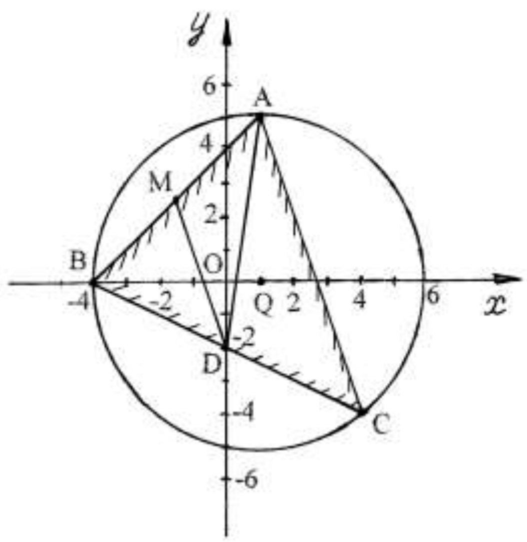



Рис. 1. Графическое пояснение к задаче 10

**Разберите решение задачи 11.**

**Построить кривую, заданную уравнением $x^2 + 2x + 6y - 2 = 0$,приведя его к каноническому виду.**

**Решение:**

Преобразуем уравнение: $(x^2 + 2x) = -6y + 2$; $(x^2 + 2x + 1) = -6y + 2 + 1$;

$$(x + 1)^2 = -6y + 3; \quad (x + 1)^2 = -6(y - 0{,}5).$$

Получено уравнение параболы с вершиной в точке $O'$ ( -1; 0,5) и осью симметрии, параллельной оси Oy. Перенося начало координат в точку $O'$, получим в системе координат $x'O'y'$ уравнение

$$(x')^2 = -6(y'),$$

где параметр $p$ определяется из условия $2p = 6$, или $p = 3$.

Парабола симметрична относительно оси $O'y'$ или относительно прямой

x= -1. Фокус параболы находится на ее оси и отстоит от вершины на $p/2$. Поскольку $y' < 0$, то ветви параболы направлены вниз и фокус F лежит на

$p/2 = 1{,}5$ ниже вершины, то есть его координаты F(-1, -1).Директрисой параболы является прямая, перпендикулярная ее оси и находящаяся на расстоянии $p/2 = 1{,}5$ от вершины, причем фокус и директриса расположены по разные стороны от вершины. Учитывая это можно записать уравнение директрисы $y = 0{,}5 + 1{,}5$, или $y = 2$. Кривая приведена на рис.2.

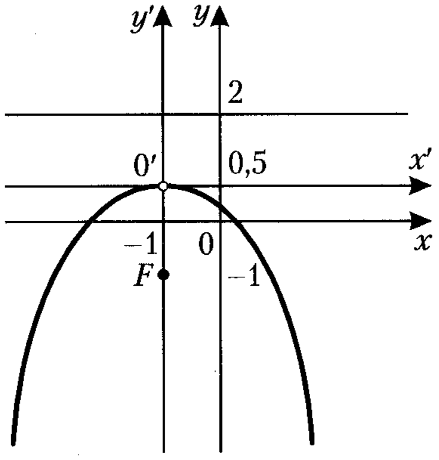



Рис.2. Графическое пояснение к задаче 11

## Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение прямоугольной декартовой системе координат.
2. Напишите формулу для нахождения расстояния между двумя точками.
3. Напишите формулы для определения координат точки, делящей данный отрезок в данном соотношении.
4. Напишите формулы преобразования координат при параллельном переносе.
5. Напишите уравнения прямой : а) с угловым коэффициентом; б) проходящей через данную точку в данном направлении; в) проходящей через две данные точки; г) в “отрезках”.
6. Как найти координаты пересечения двух прямых?
7. Напишите формулу для определения угла между двумя прямыми.
8. Каковы условия параллельности и перпендикулярности двух прямых?
9. Сформулируйте определение окружности.
10. Напишите уравнение окружности с центром в любой точке плоскости xOy; с центром в начале координат.
11. Дайте определение эллипса. Напишите каноническое уравнение эллипса.
12. Что называется эксцентриситетом эллипса? Как изменяется форма эллипса с изменением эксцентриситета от 0 до 1?
13. Дайте определение гиперболы. Напишите каноническое уравнение гиперболы.

14. Напишите формулу для определения эксцентриситета гиперболы.

15. Напишите уравнения для нахождения асимптот гиперболы.

16. Сформулируйте определение параболы. Напишите каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси Ох, Оу.

## Задания для самостоятельного решения

**В задачах 1-20 даны координаты вершин треугольника АВС:**

1) **составить уравнения медианы AD, высоты АЕ;**
2) **найти длину высоты АЕ и медианы AD;**
3) **определить угол между высотой АЕ и медианой AD;**
4) **составить уравнение средней линии DM, параллельной стороне АС;**
5) **составить уравнение окружности, проходящей через точки А, В, С;**
6) **составить систему линейных неравенств, определяющих треугольник АВС.**

| | |
|---|---|
| 1. A(-1;9), B(-3;2), C(6;3). | 11. A(2;8), B(-3;3), C(5;-1). |
| 2. A(-2;3), B(-3;-4), C(6;-2). | 12. A(4;3), B(-1;-2), C(7;-6). |
| 3. A(-5;4), B(-6;-3), C(3;-1). | 13. A(3;2), B(-2;-3), C(6;-7). |
| 4. A(-2;10), B(-6;4), C(3;2). | 14. A(-1;1), B(-6;-4), C(2;-8) |
| 5. A(-4;10), B(-3;2), C(5;7). | 15. A(-1;7), B(-6;2), C(2;-2) |
| 6. A(4;10), B(-3;9), C(1;1). | 16. A(-2;6), B(-7,1), C(1;-3) |
| 7. A(-6;7), B(-1;2), C(3;10). | 17. A(3;7), B(-2;2), C(6;-2) |
| 8. A(4;8), B(-3;7), C(1;-1). | 18. A(4;7), B(-1;2), C(7;-2) |
| 9. A(-3;-2), B(4;-3), C(2;6). | 19. A(-1;9), B(-6;4), C(2;0) |
| 10. A(-3;-2), B(4;-3), C(2;6). | 20. A(-2;10), B(-7;5), C(1;1) |

**В задачах 21-30 привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить их. Указать координаты вершин, фокусов. Написать уравнения директрисы и асимптот, если они есть. Вычислить эксцентриситет кривых.**

21.а) $4x^2 - y^2 - 8x - 4y - 16 = 0$ б) $9x^2 + 4y^2 = 144$

в) $y^2 + 4x = 0$ г) $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$

22.а) $2x^2 + 3y^2 + 8x – 6y - 1 = 0$ б) $4x^2 – 49y^2 = 49$
в) $x^2 - 2y = 0$ г) $9x^2 + 9y^2 – 36x -9 = 0$

23.а) $9x^2 + 16y^2 + 54x – 32y – 47 =0$ б) $4x^2 – 25y^2 = 100$
в) $5y^2 + x = 0$ г) $x^2 + y^2 - 12x + 10y + 45 = 0$

24.а) $9x^2 – 4y^2 + 54x + 8y + 41 =0$ б) $4x^2 + 49y^2 - 196 =0$
в) $x^2 + y^2 -4x +6y -8 = 0$ г) $2y^2 – 5x = 0$

25.а) $4x^2 – y^2 +16x – 2y - 1 =0$ б) $x^2 + y^2 – 8x + 4y + 16 = 0$
в) $8y^2 - x = 0$ г) $4x^2 + 81y^2 = 324$

26.а) $4x^2 + 25y^2 - 8x – 100y + 4 = 0$ б) $9x^2 - 100y^2 + 225 = 0$
в) $y = 9x^2 + 6x -8$ г) $4x^2 + 4y^2 – 40y + 99 = 0$

27.а) $9x^2 + 4y^2 + 36x – 8y + 36 = 0$ б) $4x^2 – 49y^2 = - 196$
в) $y = x^2 + 5x – 4$ г) $x^2 + y^2 + 2x – 14y + 46 = 0$

28.а) $4x^2 + 25y^2 –8x +100y + 4=0$ б) $9x^2 – 25y^2 = 225$
в) $y = 4x^2 + 5x +1$ г) $x^2 +y^2 +10x +12y + 45 = 0$

29.а) $2x^2 - 3y^2 + 8x - 6y + 1 = 0$ б) $9x^2 + 100y^2 = 225$
в) $4x^2 + 9y = 0$ г) $4x^2 + 4y^2 – 8x + 16y – 5=0$

30.а) $9x^2 – 4y^2 + 36x + 8y - 36 = 0$ б) $y = x^2 – 2x - 8$
в) $4x^2 + 4y^2 + 16x – 32y - 41 = 0$ г) $25x^2 +9y2 = 900$

## 2.6. Комплексные числа.

Литература: [1] гл.15; [3] гл.6; [6] гл.1.

**Разберите решение задачи 12.**

**Найти сумму, произведение и частное комплексных чисел:**
$z_1$=-1+2i и $z_2$=2-3i.

**Решение:**
*Сложение (вычитание)* комплексных чисел выполняется следующим образом, складываются (вычитаются) действительные и мнимые части комплексных чисел
$z_1+z_2$ = (-1+2i) + (2-3i) = (-1+2) + (2 – 3)I = 1 – i.

*Умножение* комплексных чисел выполняется по правилу перемножения многочленов с учетом, что $i^2 = -1$

$z_1 \cdot z_2 = (-1+2i)(2-3i) = -2 + 4i + 3i - 6i^2 = -2 + 7i - 6(-1) = -2 + 7i + 6 = 4 + 7i$.

*Деление* комплексных чисел выполняется следующим образом, числитель и знаменатель дроби умножаем на число, сопряженное знаменателю дроби. В знаменателе дроби всегда будет действительное число. Затем числитель почленно делим на знаменатель:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1+2i}{2-3i} = \frac{(-1+2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{-2+4i-3i+6i^2}{2^2-(3i)^2} = \frac{-2+i-6}{4+9} = \frac{-8+i}{13} = -\frac{8}{13} + \frac{1}{13}i\,.$$

## Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение комплексного числа.
2. В какой форме можно представить комплексные числа?
3. Дайте объяснение геометрического изображения комплексных чисел. Что такое комплексная плоскость?
4. Какие операции и как можно выполнять над комплексными числами в арифметической форме?
5. Объясните тригонометрическую и показательную форму записи комплексных чисел.
6. Напишите формулы перехода из арифметической формы комплексные числа и тригонометрическую и наоборот.
7. Какие операции над комплексными числами можно производить в тригонометрической форме? в показательной форме?
8. Дайте определение аргумента и модуля комплексного числа.
9. Объясните операцию возведения комплексного числа в натуральную степень (формула Муавра).
10. Объясните операцию нахождения корня n-ной степени из комплексного числа.

## Задания для самостоятельного решения

**Найти сумму, произведение и частное комплексных чисел:**

191. $z_1 = -3-4i, z_2 = 1-3i$
192. $z_1 = 6-2i, z_2 = -2+3i$
193. $z_1 = 7+4i, z_2 = -6+8i$
194. $z_1 = 6+2i, z_2 = -5-4i$
195. $z_1 = -5-4i, z_2 = 2+8i$
196. $z_1 = -8+4i, z_2 = -5-6i$
197. $z_1 = 6-4i, z_2 = -2+7i$
198. $z_1 = 10+2i, z_2 = -3+4i$
199. $z_1 = -4-5i, z_2 = -2+4i$
200. $z_1 = -7-3i, z_2 = -5+5i$
201. $z_1 = 12+7i, z_2 = 4-6i$
202. $z_1 = -9+2i, z_2 = -5-7i$

203. $z_1 = 4 + 3i, z_2 = -6 - 9i$

204. $z_1 = 8 - 2i, z_2 = -3 + 11i$

205. $z_1 = -9 + 3i, z_2 = 3 - 5i$

206. $z_1 = 2 + 4i, z_2 = -6 - 8i$

207. $z_1 = 3 - 8i, z_2 = -3 + 4i$

208. $z_1 = 4 + 7i, z_2 = -2 - 4i$

209. $z_1 = -4 + 9i, z_2 = 3 + 7i$

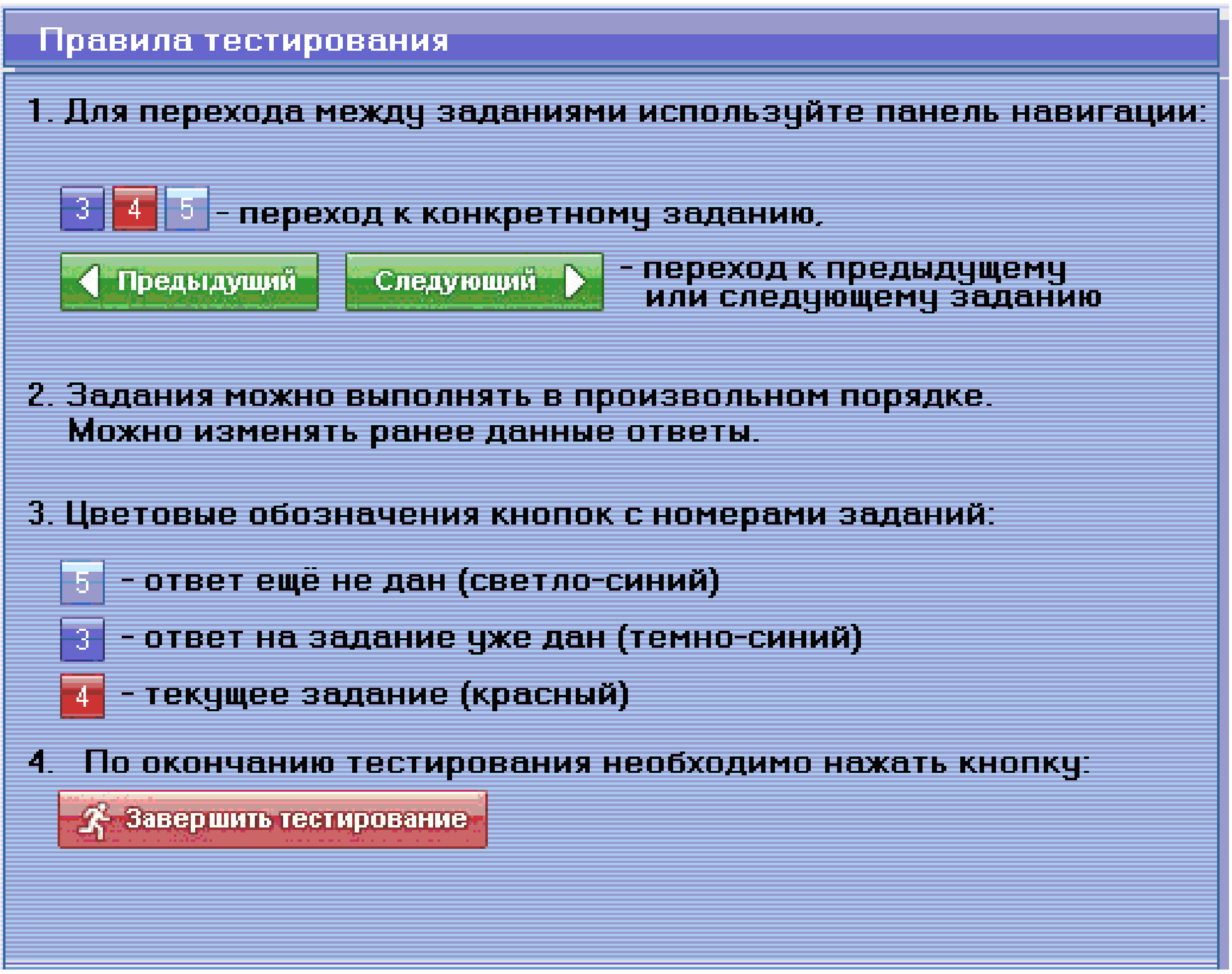
210. $z_1 = 5 + 2i, z_2 = -7 - 4i$

## 3. Примеры выполнения тестовых заданий Интернет - экзамена

В настоящее время тестовые методы контроля знаний получили очень широкое распространение. Федеральный интернет-экзамен является одной из общегосударственной форм тестирования. В нем участвует большинство Высших учебных заведений (ВУЗов) России. Результаты этого экзамена являются одним из показателей работы ВУЗа.

Целью Федерального интернет-экзамена является оценка степени соответствия содержания и уровня подготовки студентов требованиям Государственного образовательного стандарта (ГОС) Высшего профессионального образования (ВПО).

### 3.1. Правила тестирования



**Указания:**

На экране монитора перед каждым ответом из предложенного набора стоит один из знаков: или .

Знак - предполагает выбор одного из предложенных ответов. Необходимо отметь щелчком левой клавиши «мышки» знак перед тем вариантом ответа, который вы считаете верным.

Знак - предполагает указание последовательности или соответствия. Сначала, необходимо найти и отметить щелчком левой клавиши «мышки» знак , соответствующий первому из предложенных вариантов ответа.

В выбранном квадратике появляется цифра 1. Затем надо отметить квадратик, соответствующий второму варианту ответа – появляется цифра 2 и т.д.

Знак - предполагает указание одного, двух или более ответов.

Знак - предполагает введение ответа в рамку.

### 3.2. Линейная алгебра. Векторная алгебра. Евклидово пространство

**Задание 1.**

Если $(x_0, y_0)$ – решение системы линейных уравнений $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}$, то $x_0$ может определяться по формуле…

- $x_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}}$
- $x_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}}$
- $x_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}}$
- $x_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}}$

**Замечание. Здесь и далее верные варианты ответов помечены точкой и подчеркнуты.**

**Решение.**

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases}$$

По правилу Крамера $x_0 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $y_0 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, если $\Delta \neq 0$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & a_2 \end{vmatrix}.$$

В данном случае:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}; \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}.$$

**Задание 2.**

Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, тогда матрица $C = A \cdot B$ имеет вид …

$\begin{pmatrix} -5 & -3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$

**Решение.**

Пусть даны матрица $A$ размерности $m \times k$ и матрица $B$ размерности $k \times n$. Произведением матрицы $A$ на матрицу $B$ называется новая матрица $C = A \cdot B$ размерности $m \times n$ . В данном случае $A - 2 \times 2$; $B - 2 \times 1$; $C - 2 \times 1$. Элементы матрицы $C$ вычисляются по формуле:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

В данном случае: $c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) = -5$;

$c_{21} = 3 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2) = 3$. $C = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

**Задание 3 .**

Разложение определителя $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$ по элементам второй строки имеет вид…

- $-\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$
- $-b_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$
- $b_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

**Решение.**

Разложение определителя по элементам второй строки имеет вид:

$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}.\quad a_{21} = 0;\quad a_{22} = 0;\quad a_{23} = b.$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}.\quad \Delta = -b_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

**Задание 4.**

Ранг матрицы $A$ равен $k$. Правильными утверждениями являются…

- существует минор порядка $k$ матрицы $A$, который не равен нулю
- при $k > 1$ существует минор порядка $k-1$ матрицы $A$, который не равен нулю
- число строк матрицы $A$ равно $k$
- число столбцов матрицы $A$ может быть меньше $k$

**Пояснения.**

Первое утверждение верно. Ранг матрицы по определению равен $k$, если существует хотя бы один отличный от нуля минор порядка $k$ и все миноры высших порядков равны нулю. Ранг матрицы равен числу линейно независимых строк и столбцов этой матрицы.

Второе утверждение верно. Если все миноры порядка $k$ -1 равны нулю, то и минор порядка $k$ равен нулю.

Третье утверждение не верно, т.к. общее число строк и столбцов матрицы может быть больше числа линейно независимых строк и столбцов этой матрицы $(m \ge k; n \ge k)$.

Четвертое утверждение абсурдно.

**Задание 5.**

Угол между векторами $\bar{\mathbf{a}} = (3;-2;1;\alpha)$ и $\bar{\mathbf{b}} = (6;-4;2;2)$ тупой, если…

- ○ $\alpha > -14$
- ○ $\alpha > 1$
- ○ $\alpha < 1$
- ● $\alpha < -14$

**Решение.**

Пусть даны два n-мерных вектора $\bar{a}(a_1;a_2;\ \dots a_n)$ и $\bar{b}(b_1;b_2;\ \dots b_n)$. Скалярным произведением этих векторов называется число:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n.$$

Угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ определяется формулой: $\cos\varphi = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$.

Если угол $\varphi$ тупой, то $\cos\varphi < 0$ или $\bar{a}\cdot\bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n < 0$.

В данном случае:

$\bar{a}\cdot\bar{b} = 3\cdot 6 + (-2)(-4) + 1\cdot 2 + 2\alpha = 18 + 8 + 2 + 2\alpha = 28 + 2\alpha.$

$28 + 2\alpha < 0 \quad \Rightarrow 2\alpha < -28;\ \ \alpha < -14.$

**Задание 6.**

Векторы $\bar{\mathbf{a}} = (1;-2;\alpha;2)$ и $\bar{\mathbf{b}} = (-2;4;6;-4)$ ортогональны, если $\alpha$ равно…

- ○ $-3$
- ● $3$
- ○ $-1$
- ○ $-6$

**Решение.**

Векторы $\bar{a}(a_1;a_2;\ \dots a_n)$ и $\bar{b}(b_1;b_2;\ \dots b_n)$ называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю: $\bar{a}\cdot\bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = 0.$

В данном случае $\bar{a}\cdot\bar{b} = 1\cdot(-2) + (-2)\cdot 4 + 6\alpha + 2(-4) = -2 - 8 + 6\alpha - 8 = -18 + 6\alpha$.

$-18 + 6\alpha = 0 \ \Rightarrow \quad 6\alpha = 18;\ \ \alpha = 3.$

**Задание 7.**

В евклидовом пространстве $R^3$ вектор $\bar{a} = \left(\frac{\lambda}{10}; \frac{-4}{5}; 0\right)$ является нормированным при значениях $\lambda$, равных …

- [x] 6
- [x] - 6
- [ ] 18
- [ ] $2\sqrt{41}$

**Решение.**

Вектор называется нормированным, если его модуль равен единице. В данном случае: $\sqrt{\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2 + \left(\frac{-4}{5}\right)^2 + 0^2} = 1;$

$$\frac{\lambda^2}{100} + \frac{16}{25} - 1 = 0;$$

$\lambda^2 + 64 - 100 = 0$; $\lambda^2 = 36$; $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{36}$; $\lambda_{1,2} = \pm 6$.

### 3.3. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве

**Задание 1.**

Даны вершины треугольника $M(2,3), N(4,0), K(4,-1)$. Тогда уравнение высоты $KD$ имеет вид …

- [ ] $2x + 1y - 7 = 0$
- [ ] $3x + 2y - 10 = 0$
- [ ] $2x - 3y + 11 = 0$
- [x] $2x - 3y - 11 = 0$

**Решение.**

Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через точку *K* в заданном направлении (перпендикулярно прямой MN):

$$y - y_k = k_{KD}(x - x_K).$$

По условию перпендикулярности $k_{KD} = -\frac{1}{k_{MN}}$.

$$k_{MN} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} \Rightarrow k_{MN} = \frac{0-3}{4-2} = \frac{-3}{2}. \quad \Rightarrow k_{KD} = \frac{-1}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Искомое уравнение принимает вид:

$$y - (-1) = \frac{2}{3}(x - 4) \Rightarrow 3y + 3 = 2x - 8 \Rightarrow 2x - 3y - 11 = 0.$$

**Задание 2 .**

Если $C(2;4)$ - центр окружности, которая проходит через точку $A(10;10)$ , то уравнение этой окружности имеет вид ...

- $(x-10)^2+(y-10)^2=100$
- $(x-2)^2+(y-4)^2=10$
- $(x+2)^2+(y+4)^2=100$
- $(x-2)^2+(y-4)^2=100$

**Решение.**

Уравнение окружности с центром в точке $(x_0;y_0)$ определяется уравнением:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \quad \Rightarrow \quad (x-2)^2+(y-4)^2=r^2.$$

Координаты центра заданы, поэтому достаточно определить радиус. Для этого используем условие прохождения искомой окружности через точку А(10;10); т.е. подставим координаты точки А в уравнение окружности.

$(x-2)^2+(y-4)^2=r^2$

$(10-2)^2+(10-4)^2=r^2 \Rightarrow 64+36=r^2 \Rightarrow r^2=100.$

Тогда, уравнение окружности принимает вид:

$(x-2)^2+(y-4)^2=100.$

**Задание 3.**

Установите соответствие между уравнением плоскости и ее положением в пространстве

1. $y-2x-2=0$
2. $3z+2y+4=0$
3. $3x+2y-z=0$
4. $5x+7z+2=0$

- [1] параллельна оси $z$
- [3] проходит через начало координат
- [ ] проходит через ось z
- [2] параллельна оси $x$
- [4] параллельна оси $y$

**Пояснения.**

Общее уравнение плоскости имеет вид:

$Ax+By+Cz+D=0.$

Если в уравнении отсутствует некоторая переменная, например z, то плоскость параллельна соответствующей оси, например Oz. Если отсутствует свободный член, то плоскость проходит через начало координат.

**Задание 4.**

Прямая проходит через точки $O(0;0)$ и $B(12;3)$. Тогда ее угловой коэффициент равен…

- $4$
- $\dfrac{1}{4}$
- $-\dfrac{1}{4}$
- $-4$

**Решение.**

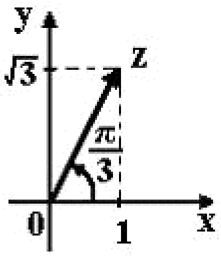
Угловой коэффициент определяется формулой:

$$k_{OB}=\frac{y_B-y_O}{x_B-x_O}\Rightarrow k_{OB}=\frac{3-0}{12-0}=\frac{1}{4}.$$

**Разделы «Комплексные числа», «Действия над комплексными числами», «Тригонометрическая форма комплексного числа» являются составными частями дидактической единицы «Комплексный анализ»**

**Задание 5.**

На рисунке представлена геометрическая иллюстрация комплексного числа $z=x+iy$.




Тогда тригонометрическая форма записи этого числа имеет вид…

- $2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$
- $4\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$
- $\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$
- $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

**Решение.**

Тригонометрическая форма комплексного числа $z = x + iy$ имеет вид:

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\varphi = arctq\dfrac{y}{x}$.

В данном случае по геометрической иллюстрации видно, что $x = 1$, $y = \sqrt{3}$ и $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. Значит $r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$ и $z = 2(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3})$.

## 4. Тестовые задания для самопроверки

### 4.1. Тест №1

**Задание 1.**

Векторы $\bar{\mathbf{a}} = (1; 2; \alpha; 2)$ и $\bar{\mathbf{b}} = (3; -1; 5; -3)$ ортогональны, если $\alpha$ равно…

- ○ 1
- ○ $-6$
- ○ 3
- ○ $-3$

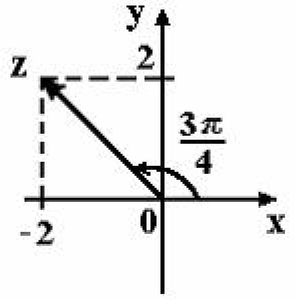
**Задание 2.**

Ранг матрицы $A$ равен $k$. Правильными утверждениями являются…

- ☐ число столбцов матрицы $A$ может быть меньше $k$
- ☐ при $k > 1$ существует минор порядка $k - 1$ матрицы $A$, который не равен нулю
- ☐ существует минор порядка $k$ матрицы $A$, который не равен нулю
- ☐ число строк матрицы $A$ равно $k$

**Задание 3.**

На рисунке представлена геометрическая иллюстрация комплексного числа $z = x + iy$.




Тогда тригонометрическая форма записи этого числа имеет вид…

- $4\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$
- $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
- $4\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$
- $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

**Задание 4.**

Даны вершины треугольника $A(-2,0), B(2,6), C(4,2)$. Тогда уравнение высоты $BH$ имеет вид …

- $x - 3y = 0$
- $3x + y - 12 = 0$
- $3x - y = 0$
- $x - 3y + 16 = 0$

**Задание 5.**

В евклидовом пространстве $R^3$ вектор $\bar{a} = \left(\frac{\lambda}{4}; -\frac{3}{4}; \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ является нормированным при значениях $\lambda$, равных…

- $-\sqrt{19}$
- - 1
- $\sqrt{19}$
- 1

**Задание 6.**

Если $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1\\ -2\end{pmatrix}$, тогда матрица $C=A\cdot B$ имеет вид …

- $\begin{pmatrix}-5 & -3\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}-3\\ -5\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}-5\\ -3\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}3\\ -3\end{pmatrix}$

**Задание7.**

Разложение определителя $\begin{vmatrix}0 & 0 & a_3\\ 4 & -5 & 2\\ c_1 & c_2 & 0\end{vmatrix}$ по элементам первой строки имеет вид…

- $-\begin{vmatrix}4 & -5\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}$
- $-a_3\begin{vmatrix}4 & -5\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix}4 & -5\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}$
- $a_3\begin{vmatrix}4 & -5\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}$

**Задание 8.**

Прямая проходит через точки $O(0;0)$ и $B(15;3)$. Тогда ее угловой коэффициент равен…

- $-5$
- $-\frac{1}{5}$
- $5$
- $\frac{1}{5}$

**Задание 9.**

Если $(x_0, y_0)$ – решение системы линейных уравнений $\begin{cases}x+2y=4\\ 5x-6y=3\end{cases}$, то $y_0$ может определяться по формуле…

- $y_0=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & 5\\ 4 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & -6\end{vmatrix}}$
- $y_0=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & 4\\ 5 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & -6\end{vmatrix}}$
- $y_0=\dfrac{\begin{vmatrix}4 & 2\\ 3 & -6\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & -6\end{vmatrix}}$
- $y_0=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & -6\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 4\\ 5 & 3\end{vmatrix}}$

**Задание 10.**

Установите соответствие между уравнением плоскости и ее положением в пространстве

1. $y - 2x + 5z = 0$
2. $3y + 7z + 5 = 0$
3. $x - 3y + 2 = 0$
4. $3z - 2x + 6 = 0$

- параллельна оси $z$
- параллельна оси $y$
- проходит через начало координат
- проходит через ось у
- параллельна оси $x$

**Задание 11.**

Если $C(2;4)$ - центр окружности, которая проходит через точку $A(10;10)$ , то уравнение этой окружности имеет вид …

- $(x-10)^2 + (y-10)^2 = 100$
- $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 100$
- $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$
- $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 100$

**Задание 12.**

Дано: $z_1 = 6 + i$; $z_2 = 1 - 2i$ , тогда $\frac{z_1}{z_2}$ равно …

- $\frac{8}{5} - \frac{11}{5}i$
- $-\frac{4}{3} - \frac{13}{3}i$
- $\frac{4}{5} + \frac{13}{5}i$
- $6 - \frac{1}{2}i$

## 4.2. Тест №2

Задание 1.

Разложение определителя $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & b_2 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 \end{vmatrix}$ по элементам второй строки имеет вид…

- $-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}$
- $b_2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}$
- $-b_2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}$

**Задание 2.**

Если $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, тогда матрица $C = A \cdot B$ имеет вид …

- $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 8 \end{pmatrix}$

**Задание 3.**

Ранг матрицы $A$ равен $k$. Правильными утверждениями являются…

- матрица $A$ имеет отличный от нуля минор порядка $k$
- любой минор матрицы $A$ порядка $k+1$ равен нулю
- все миноры порядка $k-1$ матрицы $A$ равны нулю
- число строк матрицы $A$ может быть больше $k$

**Задание 4.**

Если $(x_0, y_0)$ – решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x - 5y = 1 \end{cases}$, то $x_0$ может определяться по формуле…

- $x_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}}$
- $x_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}}$
- $x_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}}$
- $x_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}}$

**Задание 5.**

Если $C(1;1)$ - центр окружности, которая проходит через точку $A(5;4)$, то уравнение этой окружности имеет вид …

- $(x-1)^2+(y-1)^2=25$
- $(x-1)^2+(y-1)^2=5$
- $(x+1)^2+(y+1)^2=25$
- $(x-5)^2+(y-4)^2=25$

Задание 6.

Прямая проходит через точки $O(0;0)$ и $B(-2;1)$. Тогда ее угловой коэффициент равен…

- $-\frac{1}{2}$
- $2$
- $\frac{1}{2}$
- $-2$

**Задание 6.**

Даны вершины треугольника $P(2,1), Q(-1,-1), R(3,2)$. Тогда уравнение высоты $PH$ имеет вид …

- $x+y+2=0$
- $3x+2y-13=0$
- $4x+3y-11=0$
- $2x+3y-13=0$

**Задание 7.**

Установите соответствие между уравнением плоскости и ее положением в пространстве

1. $2x+3z+5=0$
2. $4y-z-3=0$
3. $5x+2y-9=0$
4. $x+7y-2z=0$

- параллельна оси $x$
- параллельна оси $z$
- параллельна оси $y$
- проходит через ось y
- проходит через начало координат

**Задание 8.**

Векторы $\bar{a}=(1;-2;\alpha;2)$ и $\bar{b}=(-2;4;6;-4)$ параллельны, если $\alpha$ равно…

- $-3$
- $3$
- $-1$
- $-6$

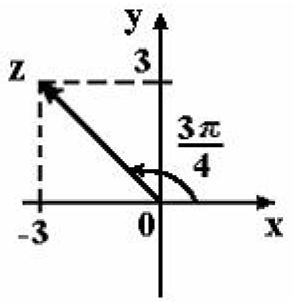
**Задание 9.**

В евклидовом пространстве $R^3$ вектор $\overline{a} = \left(\lambda; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ является нормированным при значениях $\lambda$, равных …

- ☐ $-\frac{2}{3}$
- ☐ $\frac{4}{3}$
- ☐ $\sqrt{\frac{2}{3}}$
- ☐ $\frac{2}{3}$

**Задание 10.**

На рисунке представлена геометрическая иллюстрация комплексного числа $z = x + iy$.




Тогда тригонометрическая форма записи этого числа имеет вид…

- ○ $\sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4} + i\,sin\frac{3\pi}{4}\right)$
- ○ $3\left(cos\frac{3\pi}{4} + i\,sin\frac{3\pi}{4}\right)$
- ○ $3\sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4} + i\,sin\frac{3\pi}{4}\right)$
- ○ $2\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}\right)$

**Задание 11.**

Дано: $z_1 = 1 + i$; $z_2 = 2 - i$, тогда $\frac{z_1}{z_2}$ равно …

- ○ $\frac{1}{3} + i$
- ○ $\frac{1}{2} - i$
- ○ $\frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$
- ○ $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$

## Литература

1. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришкин И.М., Фридман М.Н. Высшая математика для экономических специальностей: Учебник и практикум (часть 1) /Под ред. Проф.Н.Ш. Кремера.- М.: Высшее образование, 2005.-486с.
2. Клюшин В.Л. Высшая математика для экономистов. Учебное пособие. М.: Инфра-М, 2010.-448с.
3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. ч. 1.-М.: Рольф, 2002.-288с.
4. Баранова Е.С., Васильева Н.В., Федотов В.П. Практическое пособие по высшей математике. Типовые расчеты: Учебное пособие.-СПб.: Питер, 2009.-320 с.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах.- М.: ООО Оникс, 2006, ч.1,2.
6. Сборник заданий к типовым расчетам и контрольным работам по математическим дисциплинам. Ч 1: учеб. пособие / А.А. Афонин (и др.).- Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2011.- 541с.

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Елена Михайловна Демьян
Алексей Геннадьевич Мокриевич

# ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Для студентов направления подготовки
080100.62 «Экономика»

346493, Донской ГАУ, пос. Персиановский,
Октябрьский район, Ростовская область

---

Пописано в печать 3.09.2012г. Печать офсетная
Усл.печ.л. 4 Заказ № 48-331 Тираж 50 экз.
Издательско-полиграфический комплекс «Колорит»
346400, г.Новочеркасск, пр. Платовский, 82е