Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Департамент научно-технологической политики и образования
Донской государственный аграрный университет

А.Г. Мокриевич, Л. А. Дегтярь

ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ И ЛИНЕЙНЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Учебное пособие для самостоятельной работы студентов

пос. Персиановский
2014

УДК 51
ББК 22.1
М74

Авторы: А.Г. Мокриевич, Л.А. Дегтярь.
Рецензенты: А. И. Тариченко доктор с.-х. наук, профессор, зав кафедрой ТТЭ; В.К. Шаршак доктор техн. Наук, профессор кафедры МОППП.

Мокриевич, А.Г.
М74 Линейные модели и линейные методы оптимизации: учебное пособие для самостоятельной работы студентов/ Л.А. Дегтярь, А.Г. Мокриевич. – пос. Персиановский: Донской ГАУ, 2014.- 54 с.

В пособии рассмотрены некоторые линейные экономические модели и элементы линейного программирования. Даны основные определения и формулы, приведены примеры решения типовых задач и задания для самостоятельной работы.

Пособие поможет студентам закрепить изучаемый материал по дисциплинам: «Линейная алгебра», «Методы оптимальных решений » и «Математическое моделирование».

Данное учебное пособие *предназначено* для студентов направления подготовки 080100.62 «Экономика».

Пособие *может быть использовано* студентами направлений подготовки: 111900.68 «Ветеринарно-санитарная экспертиза», 260200.68 «Продукты питания животного происхождения».

УДК 51
ББК 22.1

Рисунков – 3.
Библиография – 5 наименований.

Утверждено на методической комиссии
экономического факультета
(протокол № 10 от 2.06.2014 г.).

Рекомендовано к изданию методическим советом
Донского ГАУ (протокол № 6 от 16.06.2014 г.).

Оглавление

Предисловие

В настоящее время математические методы и их компьютерные реализации широко используются в исследовательской и производственной сфере. Современные специалисты должны уметь разрабатывать математические модели и использовать методы принятия оптимальных решений.

В данном пособии приведены простейшие математические модели и методы оптимизации. В нем показаны возможности применения линейной алгебры и линейного программирования при решении реальных научных и практических задач. В пособии рассмотрены некоторые линейные экономические модели и элементы линейного программирования. Даны основные определения и формулы, приведены примеры решения типовых задач и задания для самостоятельной работы.

Цель предлагаемого учебного пособия помочь студентам освоить линейные модели и линейные методы оптимизации и закрепить изучаемый материал по дисциплинам: «Линейная алгебра», «Методы оптимальных решений » и «Математическое моделирование».

Данное учебное пособие *предназначено* для студентов направления подготовки 080100.62 «Экономика». Пособие *может быть использовано* студентами направлений подготовки: 111900.68 «Ветеринарно-санитарная экспертиза», 260200.68 «Продукты питания животного происхождения».

1 Линейные модели в экономике

1.1 Модель Леонтьева

1.1.1 Балансовые соотношения. Линейная модель многоотраслевого баланса Леонтьева

Макроэкономика функционирования многоотраслевого хозяйства требует баланса между отдельными отраслями. Каждая отрасль, с одной стороны, является производителем, а с другой — потребителем продукции, выпускаемой другими отраслями. Возникает довольно непростая задача расчета связей между отраслями через выпуск и потребление продукции разного вида. Впервые эта проблема была сформулирована в виде математической модели в 1936 г. в трудах известного американского экономиста В.В.Леонтьева, который попытался проанализировать причины экономической депрессии США 1929-1932 гг. Модель Леонтьева является линейной моделью многоотраслевой экономики. Эта модель основана на алгебре матриц и использует аппарат матричного анализа.

Рассмотрим балансовые соотношения на примере. Будем полагать, что производственная сфера представляет собой n отраслей, каждая из которых производит свой однородный продукт. Для обеспечения своего производства каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей (производственное потребление). Обычно процесс производства рассматривается за некоторый период времени, например за один год.

Введем следующие обозначения:
- x_i — общий объем продукции i-й отрасли (ее валовой выпуск);
- x_{ij} — объем продукции i-й отрасли, потребляемый j-й отраслью при производстве объема продукции x_j;
- y_i — объем продукции i-й отрасли, предназначенный для реализации (потребления) в непроизводственной сфере, или так называемый продукт конечного потребления. К нему относятся личное потребление граждан, удовлетворение общественных потребностей, содержание государственных институтов и т.д.

v_j - условно-чистая продукция j отрасли за некоторый промежуток времени (год, квартал и т.д).

Перечисленные показатели приводятся в стоимостном выражении.

Общий вид межотраслевого баланса представим в виде таблицы.

Таблица 1

Производство	Потребление				Конечное потребление Y	Валовой продукт X
	P_1	P_2	…	P_n		
P_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	y_1	x_1
P_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	y_2	x_2
…			…		…	…
P_n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	y_n	x_n
Условно-чистая продукция v_j	υ_1	υ_2	…	υ_n		
Валовой продукт x_j	x_1	x_2	…	x_n		

Таблица состоит из четырех квадрантов. Левый верхний квадрант характеризует межотраслевые потоки продукции. Строки этого раздела показывают распределение продукции каждой отрасли на нужды других отраслей. Столбцы отражают структуру производственного потребления отраслей.

Правый верхний квадрант содержит два столбца: в столбце Y указываются объемы конечного продукта отраслей (в его состав входят: продукция отрасли, предназначенная к потреблению в непроизводственной сфере, обеспечение общественных потребностей, возмещение выбытия основных фондов, экспортные поставки, накопление); столбец X содержит величины общего объема продукции отраслей, т.е валовой продукт.

Левый нижний квадрант, кроме строки x_j, содержит строку v_j величин условно-чистой продукции отраслей, включающих амортизационные отчисления, заработную плату и прибыль.

Важным свойством таблицы является то, что для любой строки с номером *i* справедливо соотношение баланса между производством и потреблением:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \,. \tag{1}$$

Балансовый принцип связи различных отраслей промышленности состоит в том, что валовой выпуск i-й отрасли должен быть равным сумме объемов потребления в производственной и непроизводственной сферах. В самой простой форме (гипотеза линейности, или простого сложения) балансовые соотношения имеют вид

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in} + y_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i$$

$$\text{для } i = 1, 2, \ldots, n \,. \tag{1a}$$

Уравнения (1, 1а) называются соотношениями баланса.

Аналогично, для любого столбца с номером *i* справедливо равенство

$$x_j = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \upsilon_j . \qquad (2)$$

Равенство (2) представляет стоимостную структуру продукта каждой отрасли. Оно показывает, что стоимость валового продукта отрасли складывается из затрат других отраслей на его производство и стоимости условно-чистой продукции, не производящейся внутри производственной системы.

Отметим и еще важное соотношение межотраслевого баланса: суммарный конечный продукт равен суммарной условно-чистой продукции:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{j=1}^{n} v_j . \qquad (3)$$

Поскольку продукция разных отраслей имеет разные измерения, будем в дальнейшем иметь в виду стоимостный баланс.

В. В. Леонтьевым на основании анализа экономики США и период перед второй мировой войной был установлен важный факт: в течение длительного времени величины $a_{ij} = x_{ij} / x_j$ меняются очень слабо и могут рассматриваться как постоянные числа. Это явление становится понятным в свете того, что технология производства остается на одном и том же уровне довольно длительное время, и, следовательно, объем потребления j-й отраслью продукции i-й отрасли при производстве своей продукции объема x_j есть технологическая константа.

В силу указанного факта можно сделать следующее допущение: для производства продукции j-й отрасли объема x_j нужно использовать продукцию i-й отрасли объема $a_{ij}x_i$, где a_{ij} — постоянное число. При таком допущении технология производства принимается линейной, а само это допущение называется гипотезой линейности. При этом числа a_{ij} называются коэффициентами прямых затрат. Согласно гипотезе линейности, имеем

$$x_{ij} = a_{ij} x_j \quad . \qquad (4)$$

Введем в рассмотрение векторы-столбцы объемов произведенной продукции X (вектор валового выпуска), объемов продукции конечного потребления Y(вектор конечного потребления) и матрицу A коэффициентов прямых затрат:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} , \qquad (5)$$

Тогда уравнения (1) можно переписать в виде системы уравнений:

$$X = AX + Y . \qquad (6)$$

Соотношение (4) называют уравнением линейного межотраслевого баланса. Это соотношение вместе с матричной системы уравнений (6) носит название *модели Леонтьева*. Модель Леонтьева является линейной моделью многоотраслевого баланса.

Матрица А, у которой все элементы $a_{ij} \geq 0$ (неотрицательны), называется продуктивной матрицей, если существует такой неотрицательный вектор X, для которого выполняется неравенство

$$X > AX. \tag{7}$$

Это неравенство означает, что существует хотя бы один режим работы отраслей данной экономической системы, при котором продукции выпускается больше, чем затрачивается на ее производство. Другими словами, при этом режиме создается конечный (прибавочный) продукт $Y = X - AX > 0$. Модель Леонтьева с продуктивной матрицей А называется продуктивной моделью.

Для проверки продуктивности матрицы А достаточно существования обратной матрицы

$S = (E - A)^{-1}$ с неотрицательными элементами, где E – единичная матрица:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

С помощью модели Леонтьева можно выполнить три вида плановых расчетов, при соблюдении условия продуктивности матрицы А.

1) Зная (или задавая) объемы валовой продукции всех отраслей X можно определить объемы конечной продукции всех отраслей Y

$$Y = (E - A)X. \tag{8}$$

2) Задавая величины конечной продукции всех отраслей Y можно определить величины валовой продукции каждой отрасли

$$X = (E - A)^{-1}Y. \tag{9}$$

3) Задавая для ряда отраслей величины валовой продукции, а для всех остальных отраслей – объемы конечной продукции, можно найти величины конечной продукции первых отраслей и объемы валовой продукции вторых.

Матрица S называется матрицей *полных материальных затрат*. Ее смысл следует из матричного равенства (6), которое можно записать в виде $X = SY$. Элементы матрицы S показывают, сколько всего необходимо произвести продукции в i-ой отрасли, для выпуска в сферу конечного потребления единицы продукции отрасли j.

Чистой продукцией отрасли называется разность между валовой продукцией этой отрасли и затратами продукции всех отраслей на производство этой отрасли.

1.1.2 Примеры решения типовых задач

Задача 1. Таблица 2 содержит данные баланса трех отраслей промышленности за некоторый период времени. Требуется найти объем валового выпуска каждого вида продукции, если конечное потребление по отраслям увеличить, соответственно, до 60, 70и 30 условных денежных единиц.

Таблица 2

Показатели работы трех отраслей

№ п/п	Отрасль	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
		1	2	3		
1	Добыча и переработка углеводородов	5	35	20	40	100
2	Энергетика	10	10	20	60	100
3	Машиностроение	20	10	10	10	50

Решение. Выпишем векторы валового выпуска, конечного потребления и матрицу коэффициентов прямых затрат (5):

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}, \ \bar{y} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}35 & 0{,}40 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}40 \\ 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}20 \end{pmatrix}.$$

Матрица A удовлетворяет обоим критериям продуктивности. В случае заданного увеличения конечного потребления новый вектор конечного продукта будет иметь

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Требуется найти новый вектор валового выпуска $\bar{x}_*$, удовлетворяющий соотношениям баланса в предположении, что матрица A не изменяется. В таком случае компоненты x_1, x_2, x_3 неизвестного вектора $\bar{x}_*$ находятся из системы уравнений, которая в матричной форме имеет следующий вид:

$$\bar{x}_* = A\bar{x}_* + \bar{y}_*, \text{ или } (E - A)\bar{x}_* = \bar{y}_*. \qquad (11)$$

Найдем матрицу этой системы

$$(E - A) = \begin{pmatrix} 0{,}95 & -0{,}35 & -0{,}40 \\ -0{,}10 & 0{,}90 & -0{,}40 \\ -0{,}20 & -0{,}10 & 0{,}80 \end{pmatrix}.$$

Решение системы линейных уравнений (10) при заданном векторе правой части (10) (например, методом Гаусса) дает новый вектор $\bar{x}_*$ - решение уравнений межотраслевого баланса:

$$\bar{x}_* = \begin{pmatrix} 152,6 \\ 135,8 \\ 92,5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для того чтобы обеспечить заданное увеличение компонент вектора конечного продукта, необходимо увеличить соответствующие валовые выпуски: добычу и переработку углеводородов на 52,2 %, уровень энергетики – на 35,8 % и выпуск машиностроения – на 85 % – по сравнению с исходными величинами, указанными в таблицы 2 условия задачи.

Задача 2. Пусть для трех отраслей экономики задаются коэффициенты прямых материальных затрат и объемы конечной продукции.

Таблица 3

отрасль	коэффициенты прямых затрат			конечная продукция (млн.руб.)
	1	2	3	*Yi*
1	0,1	0,2	0,1	160
2	0,3	0,1	0,2	95
3	0,2	0,3	0,3	45

На основе исходных данных:

- проверить продуктивность матрицы коэффициентов прямых материальных затрат;
- рассчитать коэффициенты полных материальных затрат;
- найти объемы валовой продукции отраслей;
- построить схему межотраслевого материального баланса;
- проверить правильность составления баланса.

Решение. Схема межотраслевого баланса состоит из четырех основных частей. Заданная по условию задачи конечная продукция отраслей находится во второй части схемы, которая характеризует отраслевую материальную структуру национального дохода.

Найдем суммы элементов столбцов матрицы А, составленной из коэффициентов прямых материальных затрат. Так как суммы элементов столбцов строго меньше единицы, значит матрица коэффициентов прямых материальных затрат продуктивна.

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} a_{i,1} &= 0,1+0,3+0,2=0,6 \\ \sum_{i=1}^{3} a_{i,2} &= 0,2+0,1+0,3=0,6 \\ \sum_{i=1}^{3} a_{i,3} &= 0,1+0,2+0,3=0,6 \end{aligned}$$

Коэффициенты полных материальных затрат находятся с помощью матрицы $S=(E-A)^{-1}$, где Е – единичная матрица, А - матрица коэффициентов прямых материальных затрат.

$$E-A=\begin{pmatrix} 0,9 & -0,2 & -0,1 \\ -0,3 & 0,9 & -0,2 \\ -0,2 & -0,3 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Найдем определитель этой матрицы:

$$\begin{aligned} |E-A| &= (0,9\cdot 0,9\cdot 0,7)+((-0,2)\cdot(-0,2)\cdot(-0,2))+ \\ &+((-0,1)\cdot(-0,3)\cdot(-0,3))-((-0,1)\cdot 0,9\cdot(-0,2))- \\ &-(0,9\cdot(-0,2)\cdot(-0,3))-((-0,2)\cdot(-0,3)\cdot 0,7)=0,436 \end{aligned}.$$

Найдем матрицу полных затрат:

$$S=\frac{1}{|E-A|}\overline{(E-A)},$$

где $\overline{(E-A)}$ - матрица, составленная из алгебраических дополнений транспонированной матрицы $E-A$.

$$S=\begin{pmatrix} 1,31 & 0,39 & 0,3 \\ 0,57 & 1,40 & 0,48 \\ 0,62 & 0,71 & 1,72 \end{pmatrix}.$$

Объем валовой продукции отраслей находится по формуле X=SY:

$$X=\begin{pmatrix} 1,31 & 0,39 & 0,3 \\ 0,57 & 1,40 & 0,48 \\ 0,62 & 0,71 & 1,72 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 160 \\ 95 \\ 45 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 259,63 \\ 246,33 \\ 244,04 \end{pmatrix}.$$

Видно что, объем валовой продукции первой отрасли 259,63 млн.руб.,
объем валовой продукции второй отрасли 246,33 млн.руб.,
объем валовой продукции третьей отрасли 244,04 млн.руб.

Значения межотраслевых потоков выражаются произведением соответствующих коэффициентов прямых затрат на полученные значения валовых выпусков $x_{ij}=a_{ij}\cdot x_j$:

$x_{11}=a_{11}\cdot x_1=0,1\cdot 259,63=25,96;$ $x_{21}=77,89$; $x_{31}=51,93$;

$x_{12}=a_{12}\cdot x_2=0,2\cdot 246,33=49,27;$ $x_{22}=24,63$; $x_{32}=73,89$;

$x_{13}=a_{13}\cdot x_3=0,1\cdot 244,04=24,40;$ $x_{23}=48,01$; $x_{33}=73,21$.

Межотраслевые потоки образуют первую часть межотраслевого баланса. Так, например, величина $x_{12}=49,27$ показывает стоимость средств производства, произведенных в первой отрасли и потребленных в качестве материальных затрат второй отраслью. Строим схему межотраслевого баланса производства и распределения продукции (млн.руб.):

Условно чистая продукция находится так $v_j=X_j-\sum_i x_{ij}$.

Для первой отрасли $v_1=X_1-\sum_i x_{i1}=259,63-(25,96+77,89+51,93)=103,85$;

для второй отрасли $v_2=246,33-(49,27+24,63+73,89)=98,54$;

для третьей отрасли $v_3 = 244{,}04 - (24{,}40 + 48{,}01 + 73{,}21) = 98{,}42$.

Условно-чистая продукция находится в третьей части схемы межотраслевого баланса.

Полученные данные необходимы для анализа соотношений: между вновь созданной и перенесённой стоимостью, между величиной необходимого и прибавочного продукта, в целом по материальному производству и в отраслевом разрезе.

Произв. / Потреб.	1	2	3	Конечная продукция Y	Валовая продукция X
1	25,96	49,27	24,40	160	259,63
2	77,89	24,63	48,01	95	246,33
3	51,93	73,89	73,21	45	244,04
Условно чистый продукт v_i	103,85	98,54	98,42	300	-
Валовая продукция x_j	259,63	246,33	244,04	-	750

В результате анализа условно-чистой продукции, можно сделать вывод, что у всех трех отраслей она недостаточна для решения стратегических задач.

Проверим правильность составления баланса с помощью соотношения: $\sum_i v_i = \sum_i y_i$, 300,81=300, так как разница между величинами в пределах 10% - баланс составлен верно. Данное соотношение показывает конечное распределение и использование национального дохода, которое представлено в четвертой части схемы. Данные этой части важны для отражения в модели баланса доходов и расходов населения, источников финансирования капитальных вложений, текущих затрат непроизводственной сферы, для анализа общей структуры конечных доходов по группам потребителей.

Таким образом, в общей схеме межотраслевого баланса общественного продукта независимо друг от друга совмещаются два частных баланса - материальный (первая и вторая части) и баланс затрат (первая и третья части).

Задача 3. Найти межотраслевой баланс, располагая следующими данными об экономической системе, состоящей из трех экономических объектов (например, P_1 — промышленность, P_2 — сельское хозяйство, P_3 — транспорт). Прочерки в таблице означают, что $x_{22}=x_{31}=0$.

Отрасли	P_1	P_2	P_3	$\sum$	Y	X
P_1	20	50			200	300
P_2	10	-	40			500
P_3	-				240	
$\sum$				310		
V						
X						

Решение.

1. Используем баланс между производством и потреблением продукции P_1 для отыскания $\sum_{j=1}^{3} x_{1j}$, а затем и x_{13}.

$$\sum_{j=1}^{3} x_{1j} = x_1 - y_1 = 300 - 200 = 100,$$

$$x_{13} = \sum_{j=1}^{3} x_{1j} - x_{11} - y_{12} = 100 - 20 - 50 = 30.$$

2. Аналогично, используя баланс между производством и потреблением продукции p_2, найдём y_2, предварительно подсчитав $\sum_{j=1}^{3} x_{2j} = 10 + 0 + 40 = 50$:

$$y_2 = x_2 - \sum_{j=1}^{3} x_{2j} = 500 - 50 = 450.$$

3. Значения x_1 и x_2 запишем на первых двух местах в последней строке таблицы (строка X).

Таблица примет вид:

Отрасли	p_1	p_2	p_3	$\sum$	Y	X
p_1	20	50	30	100	200	300
p_2	10	-	40	50	450	500
p_3	-				240	
$\sum$				310		
V		390				
X	300	500				

4. Найдём теперь

$\sum_{j=1}^{3} x_{3j} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_{kj} - \sum_{j=1}^{3} x_{1j} - \sum_{j=1}^{3} x_{2j} = 310 - 100 - 50 = 160$ (использовали теперь соотношение между элементами столбца $\sum$).

5. $x_3 = y_3 + \sum_{j=1}^{3} x_{3j} = 240 + 160 = 400$ (использован баланс между производством и потреблением продукции p_3).

6. Теперь запишем величину x_3 в столбец X и строчку X.

7. Суммарные затраты всех трёх отраслей на производство продукции первой отрасли $\sum_{k=1}^{3} x_{1k} = 20 + 10 + 0 = 30$ запишем на первом месте в строке $\sum$.

8. Теперь можно найти условно чистую продукцию v_1 как разность между валовым выпуском x_1=300 и суммарными затратами $\sum_{k=1}^{3} x_{1k} = 30$:

$$v_1=300-30=270.$$

Таблица примет вид:

Отрасли	p_1	p_2	p_3	$\sum$	Y	X
p_1	20	50	30	100	200	300
p_2	10	-	40	50	450	500
p_3	-			160	240	400
$\sum$	30			310		
V	270	390				
X	300	500	400			

Осталось совсем мало «белых пятен».

9. Из равенства между суммарным *конечным* продуктом и суммарной условно чистой продукцией

$$\sum_{j=1}^{3} y_j = \sum_{j=1}^{3} y_j$$

получаем величину

$$v_3 = \sum_{j=1}^{3} y_j - v_1 - v_2 = 200 + 450 + 240 - 270 - 390 = 230.$$

10. Теперь, когда строки V и X полностью заполнены, можно определить суммарные затраты на производство продукции второй и третьей отраслей:

$$\sum_{k=1}^{3} x_{k2} = x_2 - v_2 = 500 - 390 = 110,$$

$$\sum_{k=1}^{3} x_{k3} = x_3 - v_3 = 400 - 230 = 170.$$

11. Завершит составление баланса вычисление затрат продукции третьей отрасли на производство продукции p_2 и на собственные производственные нужды p_3:

$$x_{32}=\sum_{k=1}^{3}x_{k2}-x_{12}-x_{22}=110-50-0=60,$$

$$x_{33}=\sum_{k=1}^{3}x_{k3}-x_{13}-x_{23}=170-30-40=100.$$

Окончательно получаем:

Отрасли	p_1	p_2	p_3	$\sum$	Y	X
p_1	20	50	30	100	200	300
p_2	10	-	40	50	450	500
p_3	-	60	100	160	240	400
$\sum$	30	110	170	310		
V	270	390	230			
X	300	500	400			

1.2 Модель международной торговли. Собственные векторы и собственные значения матриц

1.2.1 Построение модели

Модель международной торговли (кратко: модель обмена) служит для ответа на следующий вопрос: какими должны быть соотношения между государственными бюджетами стран, торгующих между собой, чтобы торговля была взаимовыгодной, т.е. не было значительного дефицита торгового баланса для каждой из стран- участниц.

Проблема достаточно важна, так как дефицит в торговле между странами порождает такие явления, как лицензии, квоты, таможенные пошлины и даже торговые войны.

Для простоты изложения рассмотрим три страны-участницы торговли с государственными бюджетами X_1, X_2, X_3, которые условно назовем США, Германия, и Кувейт. Будем считать, что весь госбюджет каждой страны тратится на закупки товаров либо внутри страны, либо на импорт из других стран. Пусть, скажем, США тратят половину своего бюджета на закупку товаров внутри страны, $1/4$ бюджета – на товары из Германии, оставшуюся $1/4$ бюджета – на товары из Кувейта. Кувейт, в свою очередь, тратит $1/2$ бюджета на закупки в Германии и ничего не закупает внутри страны.

Введем *структурную матрицу* торговли:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{США} & \text{Германия} & \text{Кувейт} \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}, \end{array}$$

где a_{ij} – часть госбюджета, которую j-я стана тратит на закупки товаров i-й страны (сумма элементов матрицы A в каждом столбце равна единице).

После подведения итогов торговля за год страна под номером i получит выручку $p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3$. Например, США будут иметь выручку

$$p_1 = \frac{1}{2}x_1 \quad + \frac{1}{3}x_2 \quad + \frac{1}{2}x_3$$

доля США   доля Германии доля Кувейта.

Для того чтобы торговля была сбалансированной, необходимо потребовать бездефицитность торговли для каждой страны:

$p_i \geq x_i$ для всех i

Условием бездефицитной торговли являются равенства $p_i = x_i$, $i = 1,2,3$.

В матричной форме данное утверждение, выглядит следующим образом:

$$AX = X, \tag{12}$$

где

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = (X_1, X_2, X_3)^T$$

Обобщая равенства (12) рассмотрим следующее.

Определение. Ненулевой вектор $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ *называется собственным вектором квадратной матрицы A порядка* n, *если*

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x} \tag{13}$$

где λ – некоторое число.

При этом число λ называется ***собственным значением*** матрицы A. Говорят так: $\bar{x}$ есть собственный вектор матрицы A, принадлежащий ее собственному значению λ.

Однородная система уравнений $(A - \lambda E)\bar{x} = 0$ тогда и только тогда имеет ненулевое решение, когда ее определитель равен нулю:

$$|A - \lambda E| = 0$$

Если раскрыть данный определитель, то получится многочлен степени n относительно λ , называемый ***характеристическим многочленом*** матрицы A.

Определение. Уравнение $|A-\lambda E|=0$ называется характеристическим уравнением матрицы A.

Таким образом, собственные значения матрицы А являются корнями ее характеристического уравнения.

1.2.2 Примеры решения типовых задач

Задача 1. Найдем собственные векторы и собственные значения следующей матрицы порядка 2:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение. Положим $\bar{x}=(x_1, x_2)^T$ – вектор - столбец. Тогда из соотношения (2) следует, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},0$$

т.е.

$$\begin{cases} x_1+2x_2=\lambda x_1 \\ -x_1+4x_2=\lambda x_2 \end{cases},$$

или

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1+2x_2=0 \\ -x_1+(4-\lambda)x_2=0 \end{cases}, \tag{14}$$

Если вектор $\bar{x}$ – собственный, то это означает, что однородная система уравнений имеет ненулевое решение. Это условие эквивалентно тому, что определитель системы (3) равен нулю.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

или $\lambda^2-5\lambda+6=0 \Rightarrow \lambda_1=2, \lambda_2=3$. Таким образом, собственными значениями матрицы A будут числа 2 и 3.

Найдем соответствующие собственные векторы. Подставим λ_1=2 и λ_2=3 в систему (3)

λ_1=2

$$\begin{cases} -x_1+2x_2=0 \\ -x_1+2x_2=0, \end{cases}$$

λ_2=3

$$\begin{cases} -2x_1+2x_2=0 \\ -x_1+x_2=0, \end{cases}$$

$x_1 = 2t, x_2 = t,$ $\qquad$ $x_1 = t, x_2 = t,$

$\bar{x} = t(2,1), t \neq 0,$ $\qquad$ $\bar{x} = t(1,1), t \neq 0,$

Задача 2. Найти собственные значения собственные векторы матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение. Запишем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или $(3-\lambda)^3 = 0$. Следовательно, $\lambda - 3$ – единственное собственное значение матрицы *A*. Система уравнений для отыскания собственных векторов сводиться к единственному уравнению:

$$x_1 + x_2 = 0,$$

т.е. собственный вектор $x = (-a, a, b)$ представляется в виде линейной комбинации

$$\bar{x} = (-1;1;0) + b(0;0;1)$$

двух линейно независимых векторов $\overline{a_1} = (-1;1;0)$ и $\overline{a_2} = (0;0;1)$.

Вернемся к отысканию собственного вектора *X* в модели международной торговли. Система уравнений для нахождения *X* имеет вид (1), т.е.

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Нетрудно найти общее решение этой системы:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = \frac{3}{2} x_3, \end{cases}$$

поэтому в качестве собственного вектора можно взять вектор

$$\overline{X} = (4;\ 3;\ 2).$$

В частности, это означает, что сбалансированность торговли этих трех стран может быть достигнута только в том случае, когда госбюджеты находятся в отношении

$$x_1 : x_2 : x_3 = 4 : 3 : 2.$$

1.3 Задания для самостоятельной работы

1. Модель межотраслевого баланса.

1.1. На основании заданных коэффициентов прямых материальных затрат и объемов конечной продукции для трех отраслей требуется:

- проверить продуктивность матрицы коэффициентов прямых материальных затрат;
- рассчитать коэффициенты полных материальных затрат;
- найти объемы валовой продукции отраслей;
- построить схему межотраслевого материального баланса;
- проверить правильность составления баланса.

.

Вариант 3.				
отрасль	коэффициенты прямых затрат			конечная продукция (млн.руб.)
	1	2	3	*Yi*
1	0,3	0	0,2	58
2	0,1	0,1	0,1	105
3	0,2	0,6	0	23
Вариант 4.				
	1	2	3	*Yi*
1	0	0,1	0,1	106
2	0,3	0,2	0,1	45
3	0,5	0	0,5	100
Вариант 5.				
	1	2	3	*Yi*
1	0,1	0,2	0	100
2	0,4	0	0,6	30
3	0	0,2	0,1	60
Вариант 6.				
	1	2	3	*Yi*
1	0,2	0,2	0	39
2	0	0,2	0,7	45
3	0,1	0,2	0,1	78
Вариант 7.				
	1	2	3	*Yi*
1	0,3	0,4	0,1	28
2	0,2	0,2	0	37
3	0	0,1	0,6	90

1.2. Используя балансовые соотношения, завершите составление баланса.

Вариант1

Потреб. / Произв.	P_1	P_2	P_3	Конечное потребление Y_i	Валовой продукт X_i
P_1	15		20		100
P_2	30		25	60	
P_3	10		20		85
Условно чистый продукт Z_i		50			
Валовой продукт X_i		150			

Вариант 2

Потреб. / Произв.	P_1	P_2	P_3	Конечное потребление Y_i	Валовой продукт X_i
P_1	100	0	20		400
P_2	130	0	50	70	
P_3	800	120	50		300
Условно чистый продукт Z_i					
Валовой продукт X_i					

Вариант 3

Потреб. / Произв.	P_1	P_2	P_3	Конечное потребление Yi	Валовой продукт Xi
P_1	35		50		
P_2		60		100	
P_3	30	75		180	385
Условно чистый продукт Zi	200	120	150		
Валовой продукт Xi	400				

Вариант 4

Потреб. / Произв.	P_1	P_2	P_3	Конечное потребление Yi	Валовой продукт Xi
P_1	20	32		110	
P_2	15	10		80	
P_3		18	20	100	200
Условно чистый продукт Zi	100		80		
Валовой продукт Xi					

2. Модель международной торговли.

2.1. Найти собственные значения и собственные векторы матриц.

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ з) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ и) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ к) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ л) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

д) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ м) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

е) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ н) $\begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

ж) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ о) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

2.2. Дана структурная матрица торговли A трёх стран S_1, S_2 и S_3 Найти национальные доходы стран для сбалансированной торговли.

а) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$ б) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ в) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

г) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ д) $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$ е) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{5} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

ж)
$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{4} & \frac{4}{5} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

з)
$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

и)
$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0\end{pmatrix}$$

к)
$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{2}{7} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{5}{7} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

л)
$$A=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{5}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{5}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

м)
$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\end{pmatrix}$$

н)
$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}$$

о)
$$A=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\end{pmatrix}$$

п)
$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0\end{pmatrix}$$

р)
$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{5} & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

с)
$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

т)
$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

2 Элементы линейного программирования

Термин «линейное программирование» впервые появился в 1951 г. в работах американских ученых (Дж. Данциг, Т. Купманс), а первые исследования по линейному программированию (основные задачи и приложения, критерий оптимальности, экономическая интерпретация, методы решения, геометрическая интерпретация результатов решения) были проведены в конце 30-х годов в СССР в Ленинградском университете Л. В. Канторовичем.

Под линейным программированием понимается линейное планирование, т.е. получение оптимального плана - решения в задачах с линейной структурой.

Линейное программирование широко применяется в сфере военной деятельности, сельском хозяйстве, промышленности, управлении производственными процессами и запасами, в экономике и на транспорте.

2.1 Общая постановка задачи линейного программирования.

Общей задачей линейного программирования (ЗЛП) называют задачу:

Максимизировать или минимизировать функцию

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1)$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{j+1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i (i = \overline{1, m_1}), \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i (i = \overline{m_1 + 1, m_2}), \\ \sum_{j+1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i (i = \overline{m_2 + 1, m}) \\ x_j \ge 0 (j = \overline{1, n_1}), \\ x_j - \textit{произвольные} (j = \overline{n_1 + 1, n}), \end{cases} \qquad (2)$$

где c_j, a_{ij}, b_i -заданные действительные числа, (1) - целевая функция, (2) - ограничения, $\vec{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ - план задачи.

Экономическая интерпретация задачи ЛП состоит в следующем. Моделируемая система характеризуется наличием нескольких видов «производственной деятельности» $j(j = \overline{1, n})$, для осуществления которых требуются имеющиеся в ограниченном количестве различные ресурсы $b_i, i = \overline{1, m}$. Расход i-го ресурса на единицу продукта j-го вида производственной деятельности равен a_{ij}. В свою очередь при таком потреблении результат j-го вида производственной деятельности для единицы соответствующего продукта (удельная стоимость или прибыль) характеризуется величиной c_j.

Цель построения модели состоит в определении *уровней* (объемов производства) каждого вида производственной деятельности x_j, при которых оптимизируется (максимизируется или минимизируется) общий результат производственной деятельности системы в целом без нарушения ограничений, накладываемых на использование ресурсов.

Оптимальным решением (или *оптимальным планом*) ЗЛП называется решение $\vec{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ системы ограничений (2), при котором линейная функция (1) принимает оптимальное значение.

Термины «решение» и «план» - синонимы, однако первый используется чаще, когда речь идет о формальной стороне задачи (ее математическом решении), а второй - о содержательной стороне (экономической интерпретации).

Симметричной формой записи ЗЛП называют задачу

$$\max f = \sum_{j+1}^{n} c_j x_j \qquad\qquad \min f = \sum_{j+1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j+1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i (i = \overline{1,m}) \\ x_j \ge 0 (j = \overline{1,n}) \end{cases} \text{ или задачу } \begin{cases} \sum_{j+1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i (i = \overline{1,m}) \\ x_j \ge 0 (j = \overline{1,n}) \end{cases} \qquad (3)$$

2.2Линейное программирование в экономике

1. *Задача о наилучшем использовании ресурсов.* Пусть некоторая производственная единица (цех, завод, фирма и т.д.), исходя из конъюнктуры рынка, технических или технологических возможностей и имеющихся ресурсов, может выпускать n различных видов продукции (товаров) $П_j$, $j = \overline{1,n}$. Предприятие при производстве этих видов продукции должно ограничиваться имеющимися видами ресурсов, технологий, других производственных факторов (сырья, полуфабрикатов, рабочей силы, оборудования, электроэнергии и т.д.). Все эти виды ограничивающих факторов называют ингредиентами R_i, $i = \overline{1,m}$. Они ограничены, и их количества равны соответственно $b_1, b_2, ..., b_m$ условных единиц. Известна экономическая выгода (мера полезности) производства продукции каждого вида, исчисляемая, скажем, по отпускной цене товара, его прибыльности, издержкам производства, степени удовлетворения потребностей и т.д. Примем в качестве такой меры, например, цену реализации c_j, $j=\overline{1,n}$. Известны также технологические коэффициенты a_{ij}, $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$, которые указывают, сколько единиц i-го ресурса требуется для производства единицы продукции j-го вида. Обозначим через $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ план производства, показывающий, какие виды товаров $П_1$, $П_2$, ..., $П_n$ нужно производить и в каких количествах, чтобы обеспечить предприятию максимум объема реализации при имеющихся ресурсах.

Математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, (i=\overline{1,m}), \qquad (4)$$
$$x_j \ge 0, (j=\overline{1,n}).$$

Так как переменные x_j входят в целевую функцию $f(\square)$ и систему ограничений только в первой степени, а показатели a_{ij}, b_i, c_j являются постоянными в планируемый период, то (4) - задача линейного программирования.

2. *Задача о смесях.* В различных отраслях народного хозяйства возникает проблема составления таких рабочих смесей на основе исходных материалов, которые обеспечивали бы получение конечного продукта, обладающего определенными свойствами. К этой группе задач относятся задачи формировании минимальной потребительской продовольственной корзины, составлении кормового рациона в животноводстве, шихт в металлургии, горючих и смазочных смесей в нефтеперерабатывающей промышленности, смесей для получения бетона в строительстве и т.д. Высокий уровень затрат на исходные сырьевые материалы и необходимость повышения эффективности производства выдвигает на первый план следующую задачу: получить продукцию с заданными свойствами при наименьших затратах на исходные сырьевые материалы.

Модель задачи о наилучшем составе смеси рассмотрим на примере задачи формирования минимальной потребительской продовольственной корзины. Задан ассортимент продуктов $j, (j=\overline{1,n})$, имеющихся в продаже. Каждый продукт содержит определенное количество питательных веществ, обозначаемые номерами 1,2,..., m (углеводы, белки, жиры, витамины, микроэлементы и др.). Единица j-го продукта содержит a_{ij} единиц i-го питательного вещества. Для нормальной жизнедеятельности в заданный промежуток времени нужно потреблять не менее b_i единиц i-го питательного вещества. Обозначим через c_j стоимость единицы продукта j-го вида. Необходимо определить требуемую потребительскую продовольственную корзину, имеющую минимальную стоимость.

Решение задачи - это количества x_j продуктов каждого вида, обеспечивающие необходимое количество питательных веществ при минимальных затратах на исходные продукты.

Математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i, (i=\overline{1,m}), \qquad (5)$$
$$x_j \ge 0, (j=\overline{1,n}).$$

3. *Задача о раскрое материалов.* Сущность задачи об оптимальном раскрое состоит в разработке таких технологически допустимых планов раскроя, при которых получается необходимый комплект заготовок, а отходы (по длине, площади, объему, массе или стоимости) сводятся к минимуму.

На раскрой (распил, обработку) поступает материал нескольких видов в определенном количестве. Из этого материала необходимо изготовить различные изделия. Материал может быть раскроен разными способами. Каждый способ имеет свою себестоимость и позволяет получить разное количество изделий каждого вида. Определить способ раскроя, при котором суммарная себестоимость минимальна.

Пусть n - число различных видов материала, поступающего на раскрой; d_j - количество материала j-го вида, $j=\overline{1,n};$ m - число различных видов изделий, которые надо изготовить;
b_i - число изделий i-го вида, $i=\overline{1,m}$; l -число различных способов раскроя;
a_{ijk} - число изделий i-го вида, которое можно получить из единицы материала j-го вида при k-м способе раскроя, $i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}; k=\overline{1,l}$;
c_{jk} - себестоимость раскроя единицы материала j-го вида k-м способом, $j=\overline{1,n}; k=\overline{1,l}$.

Обозначим через x_{jk} - количество единиц материала j-го вида, раскраиваемых k-м способом, $j=\overline{1,n}; k=\overline{1,l}$.

Математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} c_{jk}x_{jk} \to \min$$

$$\sum_{k=1}^{l} x_{jk} = d_{j,}\, j=\overline{1,n},$$

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{k=1}^{l} a_{jik}x_{jk} = b_i, i=\overline{1,m},$$

$$x_{jk} \ge 0,\ j=\overline{1,n}; k=\overline{1,l}.$$

Вместо критерия минимизации себестоимости в задаче может быть взят, например, критерий минимизации отходов. В этом случае в условии должно быть задано количество отходов, получаемых при каждом способе раскроя для единицы материала каждого вида.

2.3 Решение систем линейных алгебраических уравнений в форме жордановых таблиц

2.3.1 Основные понятия

Общая форма записи системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (6)$$

где a_{ij} - постоянные коэффициенты,

m - число уравнений,

n - число неизвестных,

b_i - свободные члены,

x_j - неизвестные величины.

Совокупность значений неизвестны, которая обращает все уравнения системы в тождества, называется решением этой системы.

СЛАУ называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение и несовместной в противном случае.

Совместная система может иметь одно решение или бесчисленное множество решений.

Теорема Кронекера - Капелли. Для совместности СЛАУ необходимо и достаточно чтобы ранг матрицы этой системы равнялся рангу ее расширенной матрицы.

Теорема. Совместная СЛАУ имеет единственной решение, если ранг ее матрицы равен числу неизвестных ($r = n$) и бесчисленное множество решений, если ранг ее матрицы меньше числа неизвестных ($r < n$).

В линейном программировании системы уравнений – ограничений имеют бесчисленные множества решений, из которых необходимо найти решения соответствующие оптимальному значению функции цели. Все частные решения СЛАУ (1) содержатся в *общем решении* этой системы:

$$\begin{cases} x_1 = b_1 - a_{1\,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ x_2 = b_2 - a_{2\,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = b_r - a_{r\,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n, \end{cases} \tag{7}$$

где $x_1 \ldots x_r$ - базисные переменные,

$x_{r+1} \ldots x_n$ - свободные переменные.

Если в общем решении (7) свободным переменным присвоить нулевые значения, то получится частное решение, называемое *базисным* ($b_1 \ldots b_r$*, 0,…,0)*.

Базисное решение, не содержащее отрицательных значений, называется опорным.

2.3.2 Жордановы таблицы

Запишем СЛАУ (7) в форме таблицы:

	1	$-x_{r+1} \ldots -x_s \ldots -x_n$
$x_1 =$	b_1	$a_{1\,r+1} \ldots\ldots a_{1s} \ldots\ldots a_{1n}$
…	…	………………
$x_k =$	b_k	$a_{k\,r+1} \ldots\ldots a_{ks} \ldots\ldots a_{kn}$
…	…	………………
$x_r =$	b_r	$a_{r\,r+1} \ldots\ldots a_{rs} \ldots\ldots a_{rn}$

Такую таблицу обычно называют жордановой таблицей (модифицированной жордановой таблицей). Первый столбец является заглавным столбцом таблицы, а первая строка – заглавной строкой. Свободные переменные стоят со знаком минус. Во втором столбце (под единицей) располагают свободные члены уравнений.

В качестве базисных можно взять другие переменные. Для перехода к другому базису, в котором меняются местами одна базисная (x_k) и одна свободная (x_s) переменные необходимо выполнить один пересчет таблицы (один шаг жордановых исключений). При выполнении пересчета таблицы строку номер k называют разрешающей строкой, столбец номер s называют разрешающим столбцом, а элемент a_{ks} - разрешающим элементом.

	1	$-x_{r+1}\dots -x_k\dots -x_n$
$x_1 =$	b_1'	$a_{1\,r+1}'\dots\dots a_{1s}'\dots\dots\dots a_{1n}'$
$\dots$	$\dots$	$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$x_s =$	b_k'	$a_{k\,r+1}'\dots\dots a_{ks}'\dots\dots\dots a_{kn}'$
$\dots$	$\dots$	$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$x_r =$	b_r'	$a_{r\,r+1}'\dots\dots a_{rs}'\dots\dots\dots a_{rn}'$

Новые коэффициенты обозначены символом «штрих», их значения вычисляются по *правилам пересчета таблиц*:

- разрешающий элемент заменить его обратной величиной;

- остальные элементы разрешающей строки разделить на разрешающий элемент;

- остальные элементы разрешающего столбца разделить на разрешающий элемент и изменить знак на противоположный;

- все остальные элементы таблицы вычислить по правилу прямоугольников.

Правило прямоугольников.

Умозрительно выделить прямоугольник, главную диагональ которого образуют пересчитываемый элемент и разрешающий элемент.

Рассмотрим фрагмент таблицы.

$$\begin{array}{l}
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots a_{ij}\ \dots\dots\dots\ a_{is}\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots a_{kj}\ \dots\dots\dots\ a_{ks}\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

a_{ij} - пересчитываемый элемент, a_{ks} - разрешающий элемент.

Элементы a_{ij}, a_{ks} образуют главную диагональ, элементы a_{kj}, a_{ks} образуют побочную диагональ.

Новое значение пересчитываемого элемента равно разности произведений элементов главной и побочной диагоналей, деленной на разрешающий элемент:

$$a_{ij}' = \frac{a_{ij}\cdot a_{ks} - a_{kj}\cdot a_{is}}{a_{ks}}.$$

2.3.3 Алгоритм решения СЛАУ в форме жордановых таблиц

Рассмотрим исходную СЛАУ в общей форме:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

Запишем эту систему в виде нуль - равенств.

$$\begin{cases} 0 = b_1 + a_{11}(-x_1) + a_{12}(-x_2) + \ldots + a_{1n}(-x_n), \\ 0 = b_2 + a_{21}(-x_1) + a_{22}(-x_2) + \ldots + a_{2n}(-x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = b_m + a_{m1}(-x_1) + a_{m2}(-x_2) + \ldots + a_{mn}(-x_n). \end{cases}$$

Внесем эту систему в жорданову таблицу:

	1	$-x_1 \ldots -x_s \ldots -x_n$
$0 =$	b_1	$a_{11}\ldots\ldots a_{1s}\ldots\ldots\ldots a_{1n}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$0 =$	b_k	$a_{k1}\ldots\ldots a_{ks}\ldots\ldots\ldots a_{kn}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$0 =$	b_r	$a_{r1}\ldots\ldots a_{rs}\ldots\ldots\ldots a_{rn}$

Здесь на месте базисных переменных пока стоят нули.

I. Уравнения исходной системы записать в жорданову таблицу в виде нуль - равенств (нуль - строк).

II. Выполнить один шаг жордановых исключений.
   1) Принять за разрешающую строку любое нуль-равенство, а за разрешающий столбец любой столбец ($a_{ks} \neq 0$).
   2) В новой таблице поменять местами заглавные элементы разрешающей строки и разрешающего столбца (0 и x_s или x_k и x_s).
   3) Выполнить пересчет таблицы. Правила пересчета приведены выше.
   4) Вычеркнуть нуль-столбец (элементы разрешающегося столбца можно вообще не вычислять).

III. Проанализировать новую таблицу.
   1) Если имеется нуль-строка со всеми нулевыми элементами, кроме свободного члена, то СЛАУ несовместна.
   2) Если есть нуль-строки полностью состоящие из нулей, то их надо вычеркнуть.
   3) Если нуль-равенства еще имеются, то необходимо вернуться на пункт II.

IV. После ряда шагов жордановых исключений в таблице будет получено общее решение СЛАУ.

	1	$-x_{r+1}\dots-x_k\dots-x_n$
$x_1 =$	b_1'	$a_{1\,r+1}'\dots\dots a_{1s}'\dots\dots a_{1n}'$
…	…	………………
$x_s =$	b_k'	$a_{k\,r+1}'\dots\dots a_{ks}'\dots\dots a_{kn}'$
…	…	………………
$x_r =$	b_r'	$a_{r\,r+1}'\dots\dots a_{rs}'\dots\dots a_{rn}'$

Отметим, что если $r = n$, то в таблице останется только столбец свободных членов. В этом случае СЛАУ имеет единственное решение.

2.3.4 Примеры решения типовых задач

Пример 1. Решить СЛАУ.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15\ , \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 - \quad x_2 \qquad = 5. \end{cases}$$

Решение.

Составим жорданову таблицу.

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
0 =	15	2	-1	4
0 =	8	2	1	**<u>1</u>**
0 =	5	3	-1	0

Выберем разрешающий элемент. Он выделен жирным шрифтом и подчеркнут.

После пересчета элементов таблица принимает вид:

	1	$-x_1$	$-x_2$	-0
0 =	-17	-6	-5	-4
$x_3 =$	8	2	1	**<u>1</u>**
0 =	5	3	-1	0

Нуль - столбец можно вычеркнуть.

	1	$-x_1$	$-x_2$
0 =	-17	-6	-5
$x_3 =$	8	2	1
0 =	5	3	**<u>-1</u>**

Выберем разрешающий элемент.

После пересчета элементов таблица принимает вид:

	1	$-x_1$
0 =	-42	-21
$x_3 =$	13	5
$x_2 =$	-5	-3

Разделим все элементы нуль - строки на -21.

	1	$-x_1$
0 =	2	**1**
$x_3 =$	13	5
$x_2 =$	-5	-3

Выберем разрешающий элемент.

После пересчета элементов таблица принимает вид:

	1
$x_1 =$	2
$x_3 =$	3
$x_2 =$	1

Ответ: (2; 1; 3).

Пример 2. Решить СЛАУ.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 2, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение.

Составим жорданову таблицу.

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
0 =	2	2	-3	-1
0 =	1	-1	-1	2
0 =	3	**1**	-4	1

Выберем разрешающий элемент.

После пересчета элементов таблица принимает вид:

	1	$-x_2$	$-x_3$
0 =	-4	**5**	-3
0 =	4	-5	3
$x_1 =$	3	-4	1

Выберем разрешающий элемент.

После пересчета элементов таблица принимает вид:

	1	$-x_3$
$x_2 =$	-4/5	-3/5
$0 =$	0	0
$x_1 =$	-1/5	-7/5

Найдено общее решение СЛАУ в базисе (x_1 ; x_2):

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{5} + \frac{7}{5}x_3; \\ x_2 = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}x_3. \end{cases}$$

2.3.5 Задания для самостоятельного решения

Решить СЛАУ.

1.
$$\begin{cases} 2x_1 \qquad + 2x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_2 + x_4 - 2x_5 = -10 \\ -x_3 + x_4 - 2x_5 = 3. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + \qquad +2x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 18, \\ x_1 + x_2 + x_3 \quad - 2x_4 = 1, \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 6, \\ 2x_2 - x_3 \quad - 3x_4 \quad = 4, \\ 3x_1 \quad + 2x_3 + x_4 \quad = 2. \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} 2x_1 + \ x_2 \qquad - x_4 = 2, \\ x_2 \ + 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ -x_1 - 2x_2 \qquad - 3x_4 = 1. \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + x_5 = 5, \\ -5x_1 + x_2 - x_3 \quad + x_5 + x_6 = -6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \qquad\quad = 4 \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} x_1 \qquad + 2x_4 - 2x_5 = 4, \\ -x_3 - 3x_4 + x_5 = 5, \\ x_2 \qquad\qquad + 3x_5 = -2. \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 \quad + x_4 \quad = 12, \\ -x_1 \qquad\qquad\quad + x_5 = -2, \\ x_1 + x_2 - x_3 \qquad\quad = 4. \end{cases}$$
8.
$$\begin{cases} x_1 \quad + x_2 + x_3 + x_4 \qquad = 8, \\ x_1 \ + \ 2x_2 \qquad\qquad x_5 \quad = 5, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 \qquad - x_5 + x_6 = 5. \end{cases}$$
9.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad\qquad = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 4, \\ \quad x_2 + x_3 + x_4 \ = -3, \\ \qquad x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ \qquad\qquad x_4 + x_5 = -1. \end{cases}$$

10.
$$\begin{cases} 6x_1 \quad + 2x_3 \qquad + 2x_5 \quad = -4, \\ -2x_1 \ - 2x_3 + \ x_4 \qquad\quad = -6, \\ -x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad = -4. \end{cases}$$

2.4 Базисные и опорные решения СЛАУ

2.4.1 Основные понятия

Для отыскания всех базисных решений необходимо:

1) Получить общее решение СЛАУ в любом базисе и выписать первое базисное решение.
2) Выполняя шаг за шагом ряд жордановых исключений переходить от одного базиса к другому и выписывать соответствующие базисные решения.

Чтобы найти все опорные решения СЛАУ можно получить все базисные решения и выбрать из них решения, не содержащие отрицательных элементов. Оказывается, что если наложить определенные условия на выбор разрешающего элемента, то можно найти опорные решения без полного перебора базисных решений, то есть можно переходить от одного опорного решения к другому опорному решению.

Симплексным отношением называется отношение элемента столбца свободных членов к соответствующему элементу разрешающего столбца. В дальнейшем в столбце свободных членов не будет отрицательных элементов и симплексное отношение будет вычисляться только для положительных элементов разрешающего столбца.

2.4.2 Алгоритм отыскания опорных решений СЛАУ

I. Уравнения исходной системы записать в жорданову таблицу в виде нуль-равенств с *неотрицательными свободными членами*.

II. Выполнить один шаг жордановых исключений.

1) Принять за разрешающий столбец - столбец, содержащий хотя бы один положительный элемент (не считая свободного члена). Выбрать разрешающую строку (разрешающий элемент) по минимальному симплексному отношению.
2) В новой таблице поменять местами заглавные элементы разрешающей строки и разрешающего столбца (0 и x_s или x_k и x_s).
3) Выполнить пересчет таблицы. Правила пересчета приведены выше.
4) Если разрешающая строка содержала нуль-равенство, то нуль-столбец нужно вычеркнуть (элементы разрешающегося столбца можно вообще не вычислять).

III. Проанализировать новую таблицу.

1) Если имеется нуль-строка со всеми нулевыми элементами, кроме свободного члена, то СЛАУ несовместна.
2) Если есть нуль-строки полностью состоящие из нулей, то их надо вычеркнуть.
3) Если хотя бы один свободный член отрицательный, то допущена ошибка при выборе разрешающего элемента. Необходимо ее устранить.
4) Если имеется нуль-строка в которой все элементы кроме свободного члена меньше либо равны нулю, то СЛАУ *опорных решений не имеет*.
5) Если нуль-равенства еще имеются, то необходимо вернуться на пункт II.

IV. После ряда шагов жордановых исключений в таблице будет получено общее решение СЛАУ и соответствующее ему первое опорное решение. Для отыскания других опорных решений необходимо вернуться на пункт II.

2.4.3 Примеры решения типовых задач

Пример 1. В предыдущем примере найдено общее решение СЛАУ в базисе (x_1 ; x_2):

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{5} + \frac{7}{5}x_3; \\ x_2 = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}x_3. \end{cases}$$

Выпишем соответствующее ему базисное решение – (-1/5; -4/5; 0).

Найдем базисное решение СЛАУ в базисе (x_2 ; x_3).

	1	$-x_3$
$x_2 =$	-4/5	-3/5
$x_1 =$	-1/5	**-7/5**

После пересчета элементов таблица принимает вид:

	1	$-x_1$
$x_2 =$	-5/7	-3/7
$x_3 =$	1/7	-5/7

Базисное решение найдено (0; -5/7; 1/7).

Пример 2. Найти три опорных решения СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 + 4x_4 - 2x_5 = 4; \\ x_2 + 3x_5 = 2; \\ x_3 - x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$$

Решение.

Составим жорданову таблицу.

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$
0 =	4	**1**	0	0	2	-2
0 =	2	0	**1**	0	0	3
0 =	3	0	0	**1**	-1	1

Здесь можно одновременно выполнить три шага жордановых исключений. Выберем три разрешающих элемента.

После пересчета элементов таблица принимает вид:

	1	$-x_4$	$-x_5$
$x_1 =$	4	2	-2
$x_2 =$	2	0	3
$x_3 =$	3	-1	1

Выпишем первое опорное решение (4; 2; 3; 0; 0).

Для отыскания следующего опорного решения выберем новый разрешающий элемент по минимальному симплексному отношению.

	1	$-x_4$	$-x_5$
$x_1 =$	4	**2**	-2
$x_2 =$	2	0	3
$x_3 =$	3	-1	1

После пересчета элементов таблица принимает вид:

	1	$-x_1$	$-x_5$
$x_4 =$	2	1/2	-1
$x_2 =$	2	0	**3**
$x_3 =$	5	1/2	0

Выпишем второе опорное решение (0; 2; 5; 2; 0).

Повторим процедура выбора разрешающего элемента и пересчета таблицы.

	1	$-x_1$	$-x_2$
$x_4 =$	8/3	1/2	1/3
$x_5 =$	2/3	0	1/3
$x_3 =$	5	1/2	0

Выпишем третье опорное решение (0; 0; 5; 8/3; 2/3).

2.4.4 Задания для самостоятельной работы

1.Найти все опорные решения СЛАУ:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 - x_4 = -4, \\ 0{,}5x_1 + x_2 + 0{,}5x_5 = 3. \end{cases}$$

2. Найти 4 базисных решения СЛАУ:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 + x_5 = -2, \\ -2x_1 - 2x_3 + x_4 = -6, \\ x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

3.Найти все опорные решения СЛАУ:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_5 = 1. \end{cases}$$

4. Найти все базисные решения СЛАУ:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_2 + x_3 + x_4 = -3, \\ x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_4 + x_5 = -1. \end{cases}$$

5.Найти 2 опорных решения СЛАУ, если это возможно

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 5, \\ -5x_1 + x_2 - x_3 + x_5 + x_6 = -6. \end{cases}$$

6. Найти 6 базисных решения СЛАУ:

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_4 + 2x_5 = -4, \\ -x_3 - 3x_4 + x_5 = 5, \\ 2x_2 + 6x_5 = -4. \end{cases}$$

7.Найти 3 базисных решения СЛАУ:

$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 \quad + x_4 = 12, \\ -x_1 \qquad + x_5 = -2, \\ x_1 + x_2 - x_3 \qquad = 4. \end{cases}$$

8. Найти 2 опорных решения СЛАУ:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 + 2x_2 \qquad x_5 = 5, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 \qquad - x_5 + x_6 = 5. \end{cases}$$

9.Найти все опорные решения СЛАУ:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 + x_2 - x_4 = 4, \\ 0{,}5x_1 + x_2 \qquad + 0{,}5x_5 = 3. \end{cases}$$

10. Найти 4 базисных решения СЛАУ:

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_3 \qquad + 2x_5 = -4, \\ -2x_1 - 2x_3 + x_4 = -6, \\ -x_2 + x_3 = -4. \end{cases}$$

11.Найти все опорные решения СЛАУ:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 12, \\ x_1 \qquad + x_2 + x_4 = 2, \\ -x_1 \qquad - x_5 = -1. \end{cases}$$

12. Найти все базисные решения СЛАУ:

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = -2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_2 + x_3 + x_4 = -3, \\ x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ - x_4 - x_5 = 1. \end{cases}$$

13.Найти все опорные решения СЛАУ:

$$\begin{cases} 2x_1 \qquad + 2x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_2 + x_4 - 2x_5 = -10 \\ -x_3 + x_4 - 2x_5 = 3. \end{cases}$$

14. Найти все базисные решения СЛАУ:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + \quad +2x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 18, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \end{cases}$$

2.5 Графическое решение задач линейного программирования

2.5.1 Геометрическая интерпретация

Геометрическая интерпретация экономических задач дает возможность наглядно представить их структуру и выявить особенности. Графически можно решить только задачи линейного программирования (ЗЛП) с двумя переменными.

Случай двух переменных проясняет свойства ЗЛП, приводит к идее ее решения, делает решения геометрически наглядными.

Пусть дана задача:

$$f=c_1x_1+c_2x_2 \rightarrow max \tag{8}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases} \tag{9}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \tag{10}$$

Рассмотрим геометрическую интерпретацию элементов этой задачи. Введем на плоскости декартову прямоугольную систему координат x_1Ox_2 и сопоставим каждой паре чисел (x_1,x_2) точку плоскости с координатами x_1 и x_2. Выясним сначала, что представляет собой множество точек, соответствующих допустимым решениям данной задачи.

Рассмотрим одно линейное неравенство $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$.
Оно определяет на плоскости одну из двух полуплоскостей, на которые прямая $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ разбивает плоскость. Найдем, с какой стороны от прямой лежит полуплоскость, точки которой удовлетворяют заданному неравенству. Это можно сделать путем подстановки координат одной точки в неравенство. Если координаты точки удовлетворяют неравенству, то эта точка лежит в полуплоскости, соответствующей решению данного неравенства. Штриховку прямой надо произвести так, чтобы она «закрывала» выбранную точку. В противном случае неравенству соответствует другая плоскость.

Каждое из ограничений (9), (10) задает на плоскости x_1Ox_2 некоторую полуплоскость. Допустимое множество планов ЗЛП геометрически изображается пересечением (общей частью) полуплоскостей, определяемых отдельными ограничениями. Полуплоскость - выпуклое множество. Множество называется выпуклым, если ему вместе с двумя произвольными точками принадлежит и прямолинейный отрезок, их соединяющий. Пересечение любого числа выпуклых множеств является выпуклым множеством. Таким образом, область допустимых планов задачи (8) - (10) есть выпуклое множество. На рисунке 1 представлены некоторые ситуации, когда область допустимых решений ЗЛП - выпуклый многоугольник (а), неограниченная выпуклая многоугольная область (б), пустое множество (в).

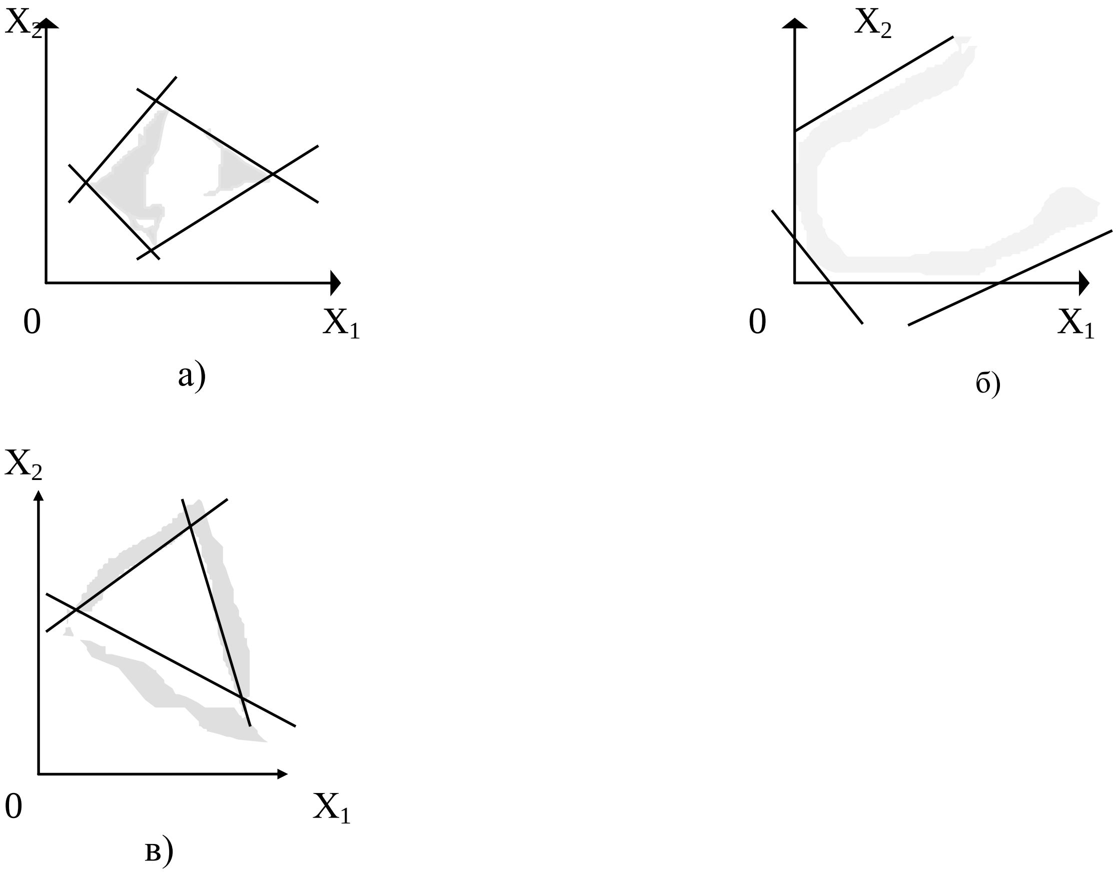

Рисунок 1

Перейдем к геометрической интерпретации *целевой функции*. Пусть область допустимых решений ЗЛП многоугольник ABCDE (рисунок 2).

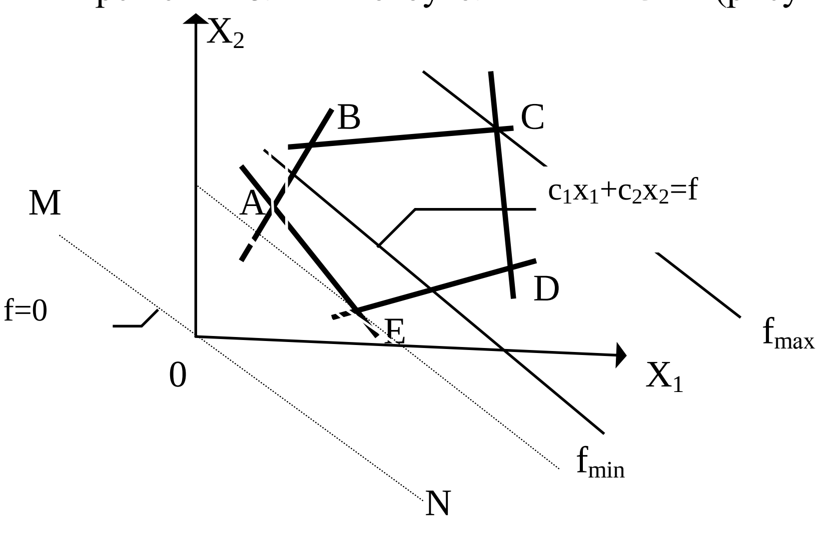

Рисунок 2

Выберем произвольное значение целевой функции f=f_0 , например f_0 =0. Получим c_1x_1+c_2x_2=f_0 . Это уравнение прямой линии MN. В точках прямой MN целевая функция сохраняет одно и то же постоянное значение f_0.

Считая f_0 параметром, получим семейство параллельных прямых, называемых линиями уровня целевой функции. Нас интересуют те точки области допустимых решений, которые принадлежат линии уровня с наибольшим (наименьшим) значением f_0 по сравнению с его значениями для всех других линий уровня, пересекающихся с областью допустимых решений.

Рассмотри частные производные функции цели по переменным x_1 и x_2 , то есть по направлению осей координат:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = c_1 \tag{11}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = c_2 \tag{12}$$

Каждая частная производная функции показывает скорость возрастания этой функции вдоль соответствующей оси. Следовательно, c_1 и c_2 - скорости возрастания вдоль осей Ox_1 и Ox_2. Вектор $\bar{c} = (c_1, c_2)$ является градиентом функции. Он показывает направление наискорейшего возрастания целевой функции, вектор

$-\bar{c} = (-c_1, -c_2)$ указывает направление наискорейшего убывания целевой функции. Вектор $\bar{c} = (c_1, c_2)$ перпендикулярен к прямым семейства: $c_1x_1 + c_2x_2 = f$.

2.5. 2 Алгоритм графического решения ЗЛП

Из геометрической интерпретации элементов ЗЛП вытекает следующий алгоритм ее графического решения.

1. С учетом системы ограничений строим область допустимых планов ЗЛП.
2. Строим вектор $\bar{c} = (c_1, c_2)$, соответствующий наискорейшему возрастанию целевой функции или вектор $-\bar{c} = (-c_1, -c_2)$, соответствующий наискорейшему убыванию целевой функции.
3. Проводим произвольную линию уровня $c_1x_1 + c_2x_2 = f_0$, перпендикулярную к вектору $\bar{c}$ так, чтобы она пересеклась с областью допустимых решений.
4. При отыскания максимума функции перемещаем линию уровня в направлении вектора $\bar{c}$ так, чтобы она касалась области допустимых решений в ее крайнем положении (крайней точки) (на рисунке 2 точка С). В случае отыскания минимума функции линию уровня f= f_0 перемещают в направлении вектора -$\bar{c}$ (на рисунке 2 - точка Е).
5. Определяем оптимальный план $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ и экстремальное значение целевой функции $f^* = f(C)$. Точка C лежит на пересечении двух прямых. Ее координаты можно найти графически или решив систему, составленную из уравнений прямых пресекающихся в этой точке.

2.5.2 Пример решения типовой задачи

Предприятию необходимо изготовить два вида продукции А и В, с использованием трех видов ресурсов R_1, R_2, R_3 количество которых ограничено. Исходные данные задачи представлены в таблице:

Вид ресурсов	Количество ресурсов, идущих на изготовление единицы продукции		Запасы ресурсов
	А	**В**	
R_1	6	6	36
R_2	4	2	20
R_3	4	8	40
Доходы от реализации продукции	12	15	

Требуется составить план выпуска продукции, который дает максимальный доход.

Решение.

Обозначим через x_1 и x_2 количество единиц продукции видов А и В, планируемых к выпуску.

Известно, что доход от реализации единицы продукции А составляет 12 усл. ед. и количество этой продукции - x_1. Следовательно, доход от реализации всей продукции А составит $12x_1$ усл. ед. Аналогично, доход от реализации всей продукции В составит $15x_2$ усл. ед. Учитывая, что доход от реализации продукции должен быть максимальным, целевая функция задачи будет иметь вид:

$$f = 12x_1 + 15x_2 \to \max$$

Известно также, что имеющиеся на предприятии ресурсы ограничены. Это обстоятельство в свою очередь необходимо отразить в модели. Предприятие производит продукцию, используя три вида ресурсов. Естественно, что фактический расход никакого вида ресурса не должен превышать запасов соответствующего вида ресурсов на предприятии. Поскольку расход каждого вида ресурсов на единицу каждого вида продукции и запасы ресурсов известны, это обстоятельство отражается в следующих ограничениях:

$$6x_1 + 6x_2 \le 36$$

$$4x_1 + 2x_2 \le 20$$

$$4x_1 + 8x_2 \le 40$$

Смысл первого ограничения состоит в том, что фактический расход ресурса R_1 на производство продукции А и В, равный $6x_1+6x_2$ (здесь $6x_1$ - количество единиц ресурса R_1, идущего на изготовление x_1 единиц продукции А; $6x_2$ - количество единиц ресурса R_1, идущее на изготовление x_2 единиц продукции В) не должен превышать запаса этого ресурса на предприятии, равного 36 ед. Аналогичный смысл имеют 2-е и 3-е ограничения только для ресурсов R_2 и R_3 соответственно.

Количество продукции, выпускаемое предприятием, должно быть величиной положительной или равной нулю (если предприятие определенный вид продукции не производит). Следовательно, в модели должны присутствовать ограничения неотрицательности переменных:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Таким образом, построена математическая модель нашей задачи как задачи линейного программирования:

$$f = 12x_1 + 15x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \leq 36 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ 4x_1 + 8x_2 \leq 40 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Начнем решение задачи с построения области допустимых решений (рисунок 3)

В первую очередь отобразим в прямоугольной системе координат условия неотрицательности переменных. В двумерном пространстве уравнению соответствует прямая линия, а неравенству - полуплоскость, лежащая по одну сторону от прямой. Прямые $x_1=0$ и $x_2=0$ совпадают с осями координат. Полуплоскости $x_1>0, x_2>0$ лежат соответственно справа от оси Ox_2 и выше оси Ox_1. Множество точек, удовлетворяющих одновременно неравенствам $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ представляют собой пересечение построенных полуплоскостей вместе с граничными прямыми и совпадают с точками первой четверти.

Теперь рассмотрим ограничения задачи. Построим по порядку прямые:

`

$6x_1+6x_2=36$	или	$x_1+x_2=6$	(а)
$4x_1+2x_2=20$	или	$2x_2+x_2=10$	(б)
$4x_1+8x_2=40$	или	$x_1+2x_2=10$	(в)

и определяем, с какой стороны от этих прямых лежат полуплоскости, точки которых удовлетворяют строгим неравенствам:

$$6x_1+6x_2<36$$
$$4x_1+2x_2<20$$
$$4x_1+8x_2<40$$

Для определения полуплоскости решений первого неравенства возьмем произвольную точку плоскости, не лежащую на прямой $6x_1+6x_2=36$, например (0;0), и подставим ее координаты в неравенство $6 \cdot 0 + 6 \cdot 0 < 36$.

В результате подстановки получили верное числовое неравенство 0< 36, и это означает, что начало координат лежит в полуплоскости решений первого неравенства. Сторона, в которой располагается полуплоскость от прямой, указывается штриховой.

Аналогично строим полуплоскость решений остальных неравенств.

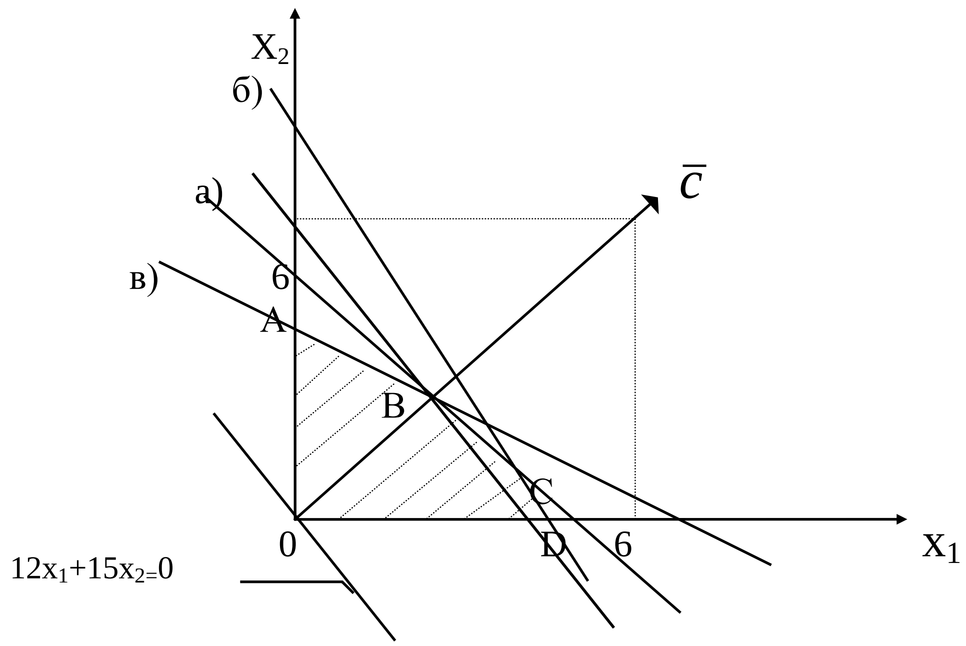

Рисунок 3

Заштрихованная часть плоскости и представляет собой искомый многоугольник допустимых решений задачи (рисунок 3)

Теперь нужно среди точек построенного многоугольника найти такую, в которой целевая функция $f=12x_1+15x_2$ достигает максимального значения. Для этого построим прямую, заданную уравнением $12x_1+15x_2=0$, которая является линией нулевого уровня функции f.

Направление возрастания линейной функции $f=12x_1+15x_2$ указывает вектор $\bar{c}$ с началом в точке (0;0) и концом в точке M_1(12,15) или в точке M_1(4,5), координаты которой равны или пропорциональны коэффициентам при соответствующих переменных функции f.

Для нахождения оптимального плана нужно «передвигать» линию нулевого уровня f параллельно самой себе в направлении вектора $\bar{c}$ до точки ее «последней встречи» с многоугольником, которая и является оптимальным планом задачи. В нашем случае это вершина B многоугольника OABCD - точка пересечения прямых (а) и (в). Координаты точки B (x_1^*, x_2^*) найдем, решив систему уравнений.

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 = 36 \\ 4x_1 + 8x_2 = 40 \end{cases} \qquad \text{откуда } x_1^*=2,\ x_2^*=4.$$

Найдем соответствующее значение целевой функции:

$$f = f(x^*) = f(2;4) = 12 \cdot 2 + 15 \cdot 4 = 84 \text{ усл. ед.}$$

Итак, для обеспечения максимального дохода от реализации готовой продукции предприятию необходимо выпустить 2 ед. продукции вида А и 4 ед. продукции вида В. При таком плане доход от реализации составит 84 усл. ед.

2.5.4 Задания для самостоятельной работы

Решить графически ЗЛП.

1.

$$f = 5x_1 - x_2 \ (max)$$
$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 - 4x_2 \le 4, \end{cases} \quad x_j \ge 0.$$

2.

$$f = 3x_1 - 2x_2 \ (max)$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 8, \\ 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 \le 3, \end{cases} \quad x_j \ge 0.$$

3.

$$z = x_1 - 10x_2 \ (min)$$
$$\begin{cases} x_1 - 0{,}5x_2 \le 0, \\ x_1 - 5x_2 \ge -5, \end{cases} \quad x_1 \ge 0; \ x_2 \ge 0.$$

4.

$$z = 6x_1 - 5x_2 \ (max)$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ -x_1 + x_2 \le 12, \\ x_1 - x_2 \le 12, \end{cases} \quad x_1 \ge 0; \ x_2 \ge 0.$$

5.

$$f = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 (min)$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \end{cases} \quad x_j \ge 0$$

6.

$$f = 5x_1 - x_2\ (max)$$
$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 - 4x_2 \le 4, \end{cases} \quad x_j \ge 0.$$

7.

$$f = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 (min)$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \end{cases} \quad x_j \ge 0$$

8.

$$f = x_1 + 2x_2\ (max)$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 2, \\ -x_1 + 2x_2 \le 12, \\ 3x_1 + x_2 \le 15, \end{cases} \quad x_j \ge 0.$$

9.

$$f = -x_1 + 2x_2\ (max)$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ 3x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 + x_2 \le 5, \end{cases} \quad x_j \ge 0.$$

10.

$$z = 2x_1 + 3x_2\ (max)$$
$$\begin{cases} 3x_1 - x_4 \le 12, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \end{cases} \quad x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$$

11.

$$f = 5x_1 - x_2\ (max)$$
$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 - 4x_2 \le 4, \end{cases} \quad x_j \ge 0.$$

12.

$$f = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 (min)$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \end{cases} \quad x_j \ge 0$$

13.

$$f = 2x_1 + 5x_2\ (max)$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 24, \\ -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 12, \end{cases} \quad x_j \ge 0.$$

14.

$$f = 5x_1 - x_2\ (max)$$
$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 - 4x_2 \le 4, \end{cases} \quad x_j \ge 0.$$

2.6 Симплексный метод решения задач линейного программирования

2.6.1 Укрупненный алгоритм симплексного метода

Основная теорема линейного программирования.
Линейная функция, определенная на выпуклом l – мерном многограннике, достигает своего оптимального значения в одной или несколько вершинах этого многогранника.

Если линейная функция достигает оптимального значения в нескольких вершинах, то она имеет это оптимальное значение и в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих вершин.

Приведенная теорема указывает один из методов решения ЗЛП:

1. найти все опорные планы ЗЛВ;
2. вычислить значения функции цели при каждом опорном плане;
3. выбрать требуемое оптимальное значение и соответствующие опорные планы.

При больших размерностях ЗЛП полный перебор опорных планов практически не возможен. Поэтому обычно применяются методы упорядоченного перебора опорных планов. Рассмотрим самый распространенный универсальный метод решения ЗЛП. Этот метод называется симплексным методом или симплекс – методом.

Симплексный метод состоит в порядочном переходе от одного опорного плана ЗЛП к другому. Переходы осуществляются так, чтобы функция цели всякий раз возрастала. Второе название этого метода – метод последовательного улучшения плана.

Для решения ЗЛП симплексным методом необходимо:

1. привести ЗЛП к канонической форме записи;
2. составить симплексную таблицу для решаемой ЗЛП;
3. найти начальный опорный план ЗЛП;
4. найти оптимальный опорный план ЗЛП.

Для решения ЗЛП используются симплексные таблицы. Эти таблицы отличаются от жордановых таблиц только наличием строки содержащей функцию цели.

2.6.2 Алгоритм отыскания начального опорного плана

Опорный план ЗЛП представляет собой опорное решение системы уравнений – ограничений этой ЗЛП, поэтому алгоритм нахождения начального опорного плана ЗЛП очень похож на алгоритм отыскания опорных решения СЛАУ. Перед отысканием начального опорного плана ЗЛП должна быть приведена к канонической форме записи (система ограничений должна быть системой уравнений).

I. Уравнения системы ограничений записать в симплексную таблицу в виде нуль-равенств с *неотрицательными свободными членами*.

II. Выполнить одно преобразование таблицы.
   1) Принять за разрешающий столбец - столбец, содержащий хотя бы один положительный элемент, не считая свободного члена (f – строка не учитывается).
   2) Выбрать разрешающую строку (разрешающий элемент) по минимальному симплексному отношению.
   3) В новой таблице поменять местами заглавные элементы разрешающей строки и разрешающего столбца (0 и x_s или x_k и x_s).
   4) Выполнить пересчет таблицы, включая f – строку. Правила пересчета приведены выше.
   5) Если разрешающая строка содержала нуль-равенство, то нуль-столбец нужно вычеркнуть (элементы разрешающегося столбца можно вообще не вычислять).

III. Проанализировать новую симплексную таблицу.
   1) Если имеется нуль-строка со всеми нулевыми элементами, кроме свободного члена, то ЗЛП не имеет допустимых планов.
   2) Если есть нуль-строки полностью состоящие из нулей, то их надо вычеркнуть.
   3) Если хотя бы один свободный член отрицательный, то допущена ошибка при выборе разрешающего элемента. Необходимо ее устранить.
   4) Если имеется нуль-строка в которой все элементы кроме свободного члена меньше либо равны нулю, то ЗЛП *не имеет опорных планов*.
   5) Если нуль-равенства еще имеются, то необходимо вернуться на пункт II.

IV. После ряда преобразований симплексной таблицы в ней будет получен первый опорный план ЗЛП и соответствующая ему функция цели.

2.6.3 Алгоритм отыскания оптимального опорного плана

Перед применением данного алгоритма необходимо найти начальный опорный план и записать его в симплексную таблицу.

I. Если f- строке нет отрицательных элементов, то найденный опорный план оптимален.
   1) Ели при этом в f – строке нет нулевых элементов, то оптимальный план единственен. Необходимо выписать ответ.
   2) Если среди элементов f - строки имеется *l* нулевых элементов, необходимо выписать найденный опорный план и выполнить *l* симплексных преобразований таблицы, то есть получить еще *l* оптимальных опорных планов. При этом необходимо принимать за разрешающий столбец последовательно все столбцы нулевым элементам f – строки. В этом случае ЗЛП имеет бесчисленное множество оптимальных планов, которые определяются в выпуклой линейной комбинации всех найденных оптимальных *опорных* планов.

II. Если f - строке есть хотя бы один отрицательный элемент, которому соответствует столбец не положительных элементов, то функции цели не ограничена сверху и ЗЛП решений не имеет.

III. Если в f – строке есть хотя бы один отрицательный элемент и в соответствующем ему столбце есть хотя бы один положительный элемент, то найденный опорный план не оптимален. Необходимо перейти к другому опорному плану.
   1) Принять за разрешающий столбец, столбец соответствующий наибольшему по модулю отрицательному элементу f – строки.
   2) Выбрать разрешающую строку по минимальному симплексному отношению.
   3) Выполнить одно симплексное преобразование таблицы.
   4) Перейти на пункт I данного алгоритма.

2.6.4 Пример решения типовой задачи

Решить задачу линейного программирования:

$f = -2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 1 \qquad (min);$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 4; \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 7; \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 7; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0.$$

Решение.

Для использования стандартного алгоритма будем искать максимум функции $F= -f$. $F = 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 1$ (max).

Составим симплексную таблицу.

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$
0 =	4	-1	-1	**1**	1	0
0 =	7	-1	2	1	0	1
0 =	7	2	-1	0	1	1
F=	1	-2	1	-1	-1	0

Выберем разрешающий элемент по минимальному симплексному отношению. В качестве разрешающего столбца удобно взять столбец x_3.

После пересчета таблица принимает вид:

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_4$	$-x_5$
$x_3 =$	4	-1	-1	1	0
0 =	3	0	3	-1	**1**
0 =	7	2	-1	1	1
F=	5	-3	0	0	0

Выберем разрешающий элемент по минимальному симплексному отношению. В качестве разрешающего столбца удобно взять столбец x_5.

После пересчета таблица принимает вид:

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_4$
$x_3 =$	4	-1	-1	1
$x_5 =$	3	0	3	-1
0 =	4	2	-4	**2**
F=	5	-3	0	0

Выберем разрешающий элемент по минимальному симплексному отношению. В качестве разрешающего столбца удобно взять столбец x_4.

После пересчета таблица принимает вид:

	1	$-x_1$	$-x_2$
$x_3 =$	2	-2	1
$x_5 =$	5	1	1
$x_4 =$	2	**1**	-2
F=	5	-3	0

Начальный опорный план найден (0; 0; 2; 2; 5). Этот план не является оптимальным, так как в F строке имеется отрицательный элемент в столбце x_1.

Для отыскания оптимального опорного плана выберем в качестве разрешающего столбца, столбец в котором содержится отрицательный элемент F строки, то есть столбец x_1. Выберем разрешающий элемент по минимальному симплексному отношению. После пересчета таблица принимает вид:

	1	$-x_4$	$-x_2$
$x_3 =$	6	2	-3
$x_5 =$	3	-1	**3**
$x_1 =$	2	1	-2
F=	11	3	-6

Найден новый опорный план (2; 0; 6; 0; 3). Этот план не является оптимальным, так как в F строке имеется отрицательный элемент в столбце x_2.

Для продолжения процесса выберем в качестве разрешающего столбца, столбец в котором содержится отрицательный элемент F строки, то есть столбец x_2. Выберем разрешающий элемент по минимальному симплексному отношению. После пересчета таблица принимает вид:

	1	$-x_4$ $-x_5$
$x_3 =$	9	
$x_2 =$	1	
$x_1 =$	4	
F=	17	1 2

В F строке нет отрицательных элементов. Значит, оптимальный опорный план найден (4; 1; 9; 0; 0). Максимальное значение функции F равно 17.

Изначально требовалось найти минимум функции f =-F, поэтому $f_{\min} = -17$.

2.6.5 Задания для самостоятельной работы

1. Найти максимум функции $f = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4$
при ограничениях:
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 \le 3 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 \le 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \le 8 \end{cases}, \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

2. Найти минимум функции $f = x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 2x_4$
при ограничениях:
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 8x_4 \ge 12 \\ 7x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 \ge 8, \\ 5x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 3x_4 \ge 48 \end{cases} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

3. Найти максимум функции $z = 6x_1 + 4x_2 + 12x_3 + 10x_4$
при ограничениях:
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \le 3 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 \le 4, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 6 \end{cases} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

4. Найти минимум функции $z = 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4$
при ограничениях:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \ge 7 \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 \ge 15, \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 \ge 2 \end{cases} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

5. Найти максимум функции $f = 10x_1 + 12x_2 + 8x_3 + 10x_4$
при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \le 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \le 5 \end{cases}, \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

6. Найти минимум функции $f = 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4$
при ограничениях:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \ge 17 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 \ge 1 \\ -3x_1 + x_2 + 5x_3 \ge 2 \end{cases}, \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

7. Найти максимум функции $z = 3x_1 - 2x_2 - x_3$
при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 5 \\ 21x_1 + 14x_2 + 6x_3 \le 42, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 \le 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le -6 \end{cases} \quad x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

8. Найти минимум функции $z = -5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 6x_4$
при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 21x_2 + x_3 + 2x_4 \ge 3 \\ -x_1 - 14x_2 - 2x_3 + 3x_4 \ge 2, \\ -x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 \ge 1 \end{cases} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

9. Найти максимум функции $f = 3x_1 + 3x_2 + 4x_3$
при ограничениях:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 \le 14 \\ 1x_1 + x_2 + x_3 \le 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 14 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \le 10 \end{cases}, \quad x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

10. Найти минимум функции $f = 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4$
при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 21x_2 + 3x_3 + 2x_4 \ge 3 \\ -x_1 - 14x_2 - 2x_3 + 3x_4 \ge 2, \\ -x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 \ge 1 \end{cases} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

11. Найти минимум функции $f = 4x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 3x_4$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \geq 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \geq 3 \end{cases}, \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

12. Найти максимум функции $z = x_1 + 3x_2 + x_3$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 5 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 \leq 3, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 2 \end{cases}$$

13. Найти минимум функции $f = 10x_1 + 12x_2 + 8x_3 + 10x_4$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \geq 5 \end{cases}, \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

14. Найти максимум функции $z = 4x_1 + 3x_2 + x_3$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 \leq 3, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 1 \end{cases}$$

15. Найти минимум функции $f = 4x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 3x_4$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 \geq -2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 \geq 3 \end{cases}, \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Литература

1. Замков, О.О., Черемных, Ю.А., Тостопятенко, А.В. Математические методы в экономике. – М.: МГУ, 2001. –368с.

2. Красс, М.С., Чупрынов, Б.П. Математика для экономистов – СПб.: Питер, 2006. – 464с.

3. Кремер, Н.Ш. и др. Высшая математика для экономистов. –М.: ЮНИТИ, 1999. –471с.

4. Бакоев, С.Ю., Мокриевич, А.Г. Математическое моделирование и оптимизация в системе компьютерной математики Mathcad: учебное пособие для самостоятельной работы. – пос. Персиановский: ДонГАУ, 2013. – 64 с.

5. Экономико-математические методы и модели: Учебное пособие / Под ред. С.И. Макарова.- М.: КНОРУС , 2009 – 239 с.

6. Дегтярь, Л.А., Мокриевич, А.Г. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для самостоятельной работы студентов / Л.А. Дегтярь, А.Г. Мокриевич. – пос. Персиановский: Донской ГАУ, 2013.- 108 с.

7. Кузнецов, А.В. и др. Руководство к решению задач по математическому программированию/А.В.Кузнецов .- М.: Академия, - 2004. -251 с.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ

Алексей Геннадьевич Мокриевич
Людмила Андреевна Дегтярь

ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ И ЛИНЕЙНЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Учебное пособие для самостоятельной работы студентов

346493, Донской ГАУ, пос. Персиановский,
Октябрьский район, Ростовская область

Подписано к печати 20.06.2014 г. Формат 60x84 1/16
Объем 3,35 усл.п.л. Тираж 30 экз. Заказ № 508
Отдел оперативной полиграфии НГМИ ДонГАУ
346428 г.Новочеркасск, ул.Пушкинская, 111