

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ДЕПАРТАМЕНТ НАУЧНО - ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ  
ПОЛИТИКИ И ОБРАЗОВАНИЯ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**Анисимова О.С., Ткаченко Н.И.**

**ГИДРОГАЗОДИНАМИКА**

Учебное пособие

Персиановский

2020

УДК 621.221-62(075.5)

А-67

**Рецензенты:**

**Долматов Н.П.**, доцент, к.техн.н. зав. кафедрой

«Машины природообустройства», НИМИ, Донской ГАУ;

**Ткачев А.А.**, доцент, докт.техн.н. зав. кафедрой «Гидротехническое строительство» НИМИ ДОНСКОЙ ГАУ.

**Анисимова О.С.**

А-67 Гидрогазодинамика: учебное пособие / О.С.Анисимова, Н.И. Ткаченко; Донской ГАУ – Персиановский: Донской ГАУ, 2020. –169 с.

В учебно-методическом пособии изложены основные теоретические положения гидродинамики и газодинамики. Подобран материал для практических занятий, в котором рассмотрены примеры решения задач и даны задачи для самостоятельного решения. Составлены контрольные вопросы для проверки усвоения теоретического материала по каждому разделу дисциплины, что позволит студентам укрепить и проверить необходимые знания в процессе изучения курса гидрогазодинамики.

Учебное пособие предназначено для бакалавров, обучающихся по направлению подготовки 20.03.01 - «Техносферная безопасность».

УДК 621.221-62(075.5)

Рекомендовано к изданию методическим советом университета в качестве учебного пособия, протокол № 3 от 25.06. 2020 года.

© ФГБОУ ВО Донской ГАУ, 2020 год

© Анисимова О.С., Ткаченко Н.И., 2020 г.

## Содержание

ВВЕДЕНИЕ .....	4
Раздел 1 ГИДРОДИНАМИКА .....	7
1.1 Основные физические свойства жидкостей и газов.....	7
1.2 Гидростатическое давление жидкости.....	17
1.3 Давление жидкости на плоские и криволинейные поверхности .....	30
1.4 Основные понятия и определения гидродинамики .....	48
1.5 Основные уравнения гидродинамики .....	58
1.5.1. Уравнение неразрывности потока .....	58
1.5.2. Уравнение Бернулли .....	59
1.6 Режимы движения вязкой жидкости и гидравлические сопротивления .....	71
1.7 Истечение жидкости из отверстий и насадков.....	89
1.8 Расчет длинных трубопроводов.....	111
Материалы практических занятий.....	123
1.9 Гидравлический удар в трубопроводах .....	127
Раздел 2 ГАЗОДИНАМИКА .....	139
2.1 Одномерные течения газа.....	139
2.2 Распространение малых возмущений в неподвижном газе .....	140
2.3 Критическая скорость потока. Критические параметры потока.....	144
2.4 Закон обращения воздействия .....	146
2.5 Ударные волны. Классификация разрывов в потоках газа.....	148
2.6 Тепловые скачки.....	155
Список литературы .....	158
ПРИЛОЖЕНИЕ А .....	160
ПРИЛОЖЕНИЕ Б.....	162
ПРИЛОЖЕНИЕ В.....	164
ПРИЛОЖЕНИЕ Г.....	168
ПРИЛОЖЕНИЕ Д.....	169

## ВВЕДЕНИЕ

Согласно учебному плану подготовки бакалавров по направлению 20.03.01 «Техносферная безопасность» (профиль «Безопасность технологических процессов и производств») дисциплина «Гидрогазодинамика», относится к базовой части и является обязательной для освоения обучающимися.

Необходимыми условиями для освоения дисциплины являются: знание основных законов физики, законов механики, основ дифференциального и интегрального исчисления, умения выполнять математические вычисления с использованием вычислительной техники, пользоваться измерительными приборами, чертежными инструментами, иметь навыки выполнения чертежей, пользования компьютерной техникой, справочной литературой и иметь опыт деятельности по проведению физических экспериментов.

Дисциплина базируется на высшей математике (теория поля, дифференциальные уравнения), физике (механика, свойства жидкостей и газов), теоретической механике и служит основой для освоения дисциплин «Методы защиты гидросферы», «Защита водных объектов в чрезвычайных ситуациях», «Охрана природы и ресурсосбережение».

Процесс обучения по дисциплине, направлен на формирование *обще-профессиональной* компетенции ОПК-1 – способности учитывать современные тенденции развития техники и технологий в области обеспечения техносферной безопасности, измерительной и вычислительной техники, информационных технологий в своей профессиональной деятельности.

В результате изучения дисциплины «гидрогазодинамика» бакалавры по направлению «Техносферная безопасность» должны знать:

- основные законы механики жидких и газообразных сред;
  - модели течения жидкости и газа;
- должны владеть:
- методами расчета жидких и газовых потоков;

- приемами постановки инженерных задач для решения их коллективом специалистов различных направлений;

должны иметь опыт:

- использования математических моделей гидромеханических явлений и процессов для расчетов с использованием средств вычислительной техники;

- выполнения измерений гидромеханических характеристик жидких и газовых сред, работы с лабораторным гидравлическим оборудованием.

Гидрогазодинамика изучает законы равновесия и движения жидких и газообразных тел, применение этих законов для решения технических задач. Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что газы при скоростях, меньших по сравнению со скоростью распространения звука в них, ведут себя как несжимаемые жидкости. А капельные жидкости, например, вода, при больших давлениях ведут себя как сжимаемые жидкости.

В гидрогазодинамике принимается гипотеза о сплошности жидкости, т.е. при изучении процессов течения жидкостей и газов отвлекаются от дискретного молекулярно-атомного строения вещества, считая, что все пространство непрерывно заполнено веществом.

Основным свойством жидкости является текучесть – способность жидкости принимать форму той емкости, в которой она находится. Текучесть обусловлена тем, что жидкость в покое не способна сопротивляться внутренним касательным усилиям, т.е. усилиям, действующим вдоль поверхности сдвига.

Учет внутреннего трения (вязкости) значительно усложняет изучение законов движения жидкости, в связи с чем в гидрогазодинамике вводится понятие идеальной (невязкой) жидкости. Идеальная жидкость характеризуется абсолютной подвижностью (отсутствием сил взаимодействия между молекулами) и абсолютной неизменяемостью в объеме при изменении температуры или под действием каких-либо сил.

При изучении процессов гидрогазодинамики широко применяется ма-

тематическое моделирование, которое служит основой разработки инженерных методов расчета технологических агрегатов и систем, использующих жидкости и газы в качестве рабочих тел.

# Раздел 1 ГИДРОДИНАМИКА

## 1.1 Основные физические свойства жидкостей и газов

**Гидрогазодинамика** (ГГД) изучает движение жидкостей и газов и взаимодействие их с обтекаемыми твердыми поверхностями [3, 4. 6].

**Жидкостями** называют физические тела, занимающие по своему молекулярному строению промежуточное положение между твердыми телами и газами. В отличие от твердого тела жидкость обладает текучестью, а в отличие от газа весьма малой изменемостью своего объема при изменении внешних условий.

Отличительным свойством жидкостей и газов является их легкая подвижность или текучесть, т.е. способность неограниченно деформироваться под действием сколь угодно малой силы сдвига. Это означает, что в покоящейся жидкой среде касательные напряжения отсутствуют. Однако они возникают при появлении в потоке жидкости деформации сдвига, изменяющейся с конечной скоростью, и являются следствием теплового движения молекул и молекулярных связей между движущимися слоями жидкости (газа) [8].

Гидрогазодинамика исходит из основных принципов физики и общей механики. Силы, действующие на ограниченный объём жидкости, как и в механике твердого тела, принято делить на внутренние и внешние. Внутренние представляют собой силы взаимодействия между частицами жидкости. Внешние силы делятся на объемные, распределенные по всему объёму жидкости, например, силы тяжести, и поверхностные, действующие на свободную поверхность жидкости, а также силы, действующие со стороны ограничивающих стенок.

Отличительной особенностью жидкости является практическое отсутствие в естественных состояниях растягивающих усилий и существенное сопротивление сдвигающим силам, которые проявляются при движении жид-

кости в виде сил внутреннего трения.

В законах движения жидкостей и газов есть много общего, поэтому эти среды часто именуется одинаково – жидкостью. В тех случаях, когда эффектом сжимаемости можно пренебречь, вводят понятие (модель) несжимаемой жидкости (капельная жидкость), полагая ее плотность  $\rho = \text{const}$ . Если же плотность среды при ее движении заметно меняется ( $\rho \neq \text{const}$ ), то говорят о сжимаемой жидкости или газе [12, 15].

Первой задачей, предшествующей непосредственному изучению гидрогазодинамики, является определение физических свойств жидкостей, которые могут существенно влиять на закономерности их равновесия и движения.

**Плотность жидкости**, ( $\rho$ ) – физическая величина, определяемая для однородной среды отношением ее массы  $M$  к занимаемому объему  $V$

$$\rho = M/V. \quad (1.1.1)$$

Единицей плотности служит  $1 \text{ кг/м}^3$ .

В расчетах часто используется **удельный вес** жидкости. Плотность и удельный вес связаны между собой соотношением

$$\gamma = G/V = \rho \cdot g. \quad (1.1.2)$$

Удельный вес измеряется в  $\text{Н/м}^2$ . Так как удельный вес зависит от ускорения силы тяжести, то в инженерных расчетах принимают среднее значение  $\gamma$ , определяемое при  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ .

Для определения плотности или удельного веса жидкости применяют различные способы и приборы. В производственных условиях плотность определяют с помощью прибора, называемого денсиметром, который представляет собой колбу, загруженную мерным грузом. Верхняя запаянная часть трубки имеет малый диаметр и отградуирована в единицах плотности. Чем глубже погружается колба, тем меньше плотность жидкости. Деление на трубке, которое совмещается со свободной поверхностью жидкости, показывает ее плотность.

**Сжимаемость жидкости** – свойство изменять объем при изменении давления. Сжимаемость характеризуется коэффициентом сжимаемости  $\beta_p$ , который представляет собой относительное изменение объема жидкости при увеличении давления на единицу. Так, при увеличении давления на величину  $\Delta p$  первоначальный объем жидкости  $V$  изменится на величину

$$\Delta V = \beta_p \Delta p V. \quad (1.1.3)$$

Единица измерения коэффициента сжимаемости –  $\text{м}^2/\text{Н}$ .

Из выражения (1.3), пользуясь соотношением (1.1), получим закономерность изменения плотности жидкости при изменении давления на  $\Delta p$ :

$$\rho_p = \rho_0 / (1 + \beta_p \Delta p). \quad (1.1.4)$$

где  $\rho_0$  – плотность жидкости при начальном давлении.

Величину, обратную  $\beta_p$ , называют *модулем объемной упругости жидкости*:

$$E_{\text{ж}} = 1/\beta_p. \quad (1.1.5)$$

Единица измерения модуля объемной упругости жидкости –  $\text{Н}/\text{м}^2$ .

Модули объемной упругости большинства жидкостей настолько велики, что жидкости можно считать несжимаемыми и модули упругости принимать постоянными. Это допущение используется при выводе большинства зависимостей гидравлики. Среднее значение модуля объемной упругости для воды равно  $2050 \text{ МН}/\text{м}^2$ , а для минеральных масел  $1670 \text{ МН}/\text{м}^2$ .

Однако при решении задач о гидравлическом ударе, а также об устойчивости и колебании гидросистем сжимаемость жидкости необходимо учитывать.

Основное различие между жидкостями и газами состоит в их плотности и в степени сжимаемости. Как правило,  $\rho_{\text{г}} \ll \rho_{\text{ж}}$ . Физически это обусловлено тем, что расстояния между молекулами в газах значительно больше, чем в жидкостях, поэтому силы межмолекулярного взаимодействия в газах сравнительно малы. Иногда этими силами можно пренебречь, принимая модель

идеального газа [11].

**Тепловое расширение** – свойство жидкости изменять объем при изменении температуры

$$V_t = V_0(1 + \beta_t \Delta t), \quad (1.1.6)$$

где  $V_t$  и  $V_0$  – объемы жидкости при температурах  $t$  и  $t_0$ ;  $\Delta t = t - t_0$  – диапазон изменения температур;  $\beta_t$  – **коэффициент объемного расширения**, среднее значение которого для воды при  $20^\circ\text{C}$  равно  $2 \cdot 10^{-4}$  1/К, а для минеральных масел –  $7 \cdot 10^{-4}$  1/К. Из выражения (1.1.5) следует:

$$\rho_t = \rho_0 / (1 + \beta_t \Delta p) \quad (1.1.7)$$

Ввиду малости теплового расширения жидкости изменением плотности с изменением температуры можно пренебречь. Однако, когда жидкость заключена в замкнутом жестком объеме, увеличение температуры при отсутствии утечек может привести к опасному повышению давления (примерно на  $1,1 \text{ МПа}/1^\circ\text{C}$ )

$$\Delta p = \beta_t E_{\text{ж}} \Delta t, \quad (1.1.8)$$

где  $E_{\text{ж}}$  – модуль объемной упругости жидкости.

**Вязкостью** называется свойство жидкости оказывать сопротивление сдвигу или относительному смещению слоев.

Сила сопротивления сдвигу называется силой внутреннего трения. При прямолинейном слоистом движении жидкости сила внутреннего трения между смещающимися один относительно другого слоями выражается согласно гипотезе Ньютона зависимостью

$$N = \pm \mu F du/dt, \quad (1.1.9)$$

где  $\mu$  – динамическая вязкость жидкости;  $F$  – площадь трущихся слоев;  $du/dt$  – скорость скольжения, или градиент скорости.

Касательные напряжения между слоями жидкости

$$\tau = N/F = \pm \mu du/dt \quad (1.1.10)$$

Если напряжение сдвига не пропорционально скорости скольжения, то

жидкость называется неньютоновской, или аномальной, например, глинистый раствор, пульпа, образуемая при бурении пород. В этом случае касательное напряжение может определяться по формуле

$$\tau = \tau_0 + \mu du/dt \quad (1.1.11)$$

где  $\tau_0$ —начальное напряжение сдвига, после достижения которого рассматриваемая жидкость приходит в движение. При напряжениях меньше  $\tau$  неньютоновские жидкости испытывают только упругие деформации. Из (1.1.9) следует, что

$$\mu = \tau/(du/dt) \quad (1.1.12)$$

При  $du/dt=1$   $\tau=\mu$ . Следовательно, **динамическая вязкость** выражает удельную силу трения между слоями, скользящими с относительной скоростью, равной единице.

Динамическую вязкость жидкости измеряют в Н·с/м<sup>2</sup>.

Величина 1 Н·с/м<sup>2</sup> называется Паскаль-секунда (Па·с). При этом 1 Н·с/м<sup>2</sup> = 1 Па·с.

Паскаль-секунда равна динамической вязкости жидкости, касательное напряжение в которой при ламинарном течении и при относительной скорости скольжения слоев, находящихся на расстоянии 1 м по нормали к направлению скорости равной 1 м/с, равно 1 Н/м<sup>2</sup>.

Динамическую вязкость на практике измеряют в пуазах (П):

$$1 \text{ П} = 0,1 \text{ Н}\cdot\text{с}/\text{м}^2 = 100 \text{ сантипуазов (сП)}.$$

В расчетах часто пользуются **кинематической вязкостью**  $\nu$ :

$$\nu = \mu/\rho. \quad (1.1.13)$$

Единицей кинематической вязкости служит м<sup>2</sup>/с. Эта величина равна кинематической вязкости, при которой Динамическая вязкость жидкости плотностью 1 кг/м<sup>3</sup> равна 1 Па·с.

Кинематическую вязкость измеряют также в стоксах (Ст):

$$1 \text{ Ст} = 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с} = 1 \text{ см}^2/\text{с}; 0,01 \text{ Ст} = 1 \text{ сСт (сантистокс)}.$$

Значения кинематической вязкости воды в зависимости от ее температуры приведены в табл. П.1 Приложения.

Для упрощения теоретических расчетов и исследований в гидрогазодинамике используется модель **идеальной жидкости**, которая в отличие от реальной не имеет сил внутреннего трения (невязкая жидкость), абсолютно несжимаема и характеризуется только плотностью. Течение идеальной жидкости в каком-либо канале не сопровождается потерей энергии [7, 9].

**Поверхностное натяжение**  $\sigma$  – это величина, численно равная работе, которую нужно затратить для того, чтобы при постоянной температуре увеличить на единицу площади поверхность раздела фаз.

**Капиллярностью** называется свойство жидкости подниматься или опускаться в трубках малого диаметра под действием дополнительного давления, вызываемого силами поверхностного натяжения.

Высота подъема или опускания определяется по формуле

$$h = 2\sigma \cos\theta / \rho g r = 4\sigma \cos\theta / \rho g d,$$

где  $\sigma$  – поверхностное натяжение;  $\rho$  – плотность;  $r(d)$  – радиус (диаметр) капилляра;  $\theta$  – острый угол между касательной к свободной поверхности жидкости в точке пересечения ее со стенкой капилляра и самой стенкой.

При температуре 20°C для воды, спирта и ртути высота поднятия (опускания) будет соответственно равна  $30/d$ ,  $11,5/d$ ,  $10,15/d$  ( $d$  в мм).

### Контрольные вопросы

1. Что такое жидкость?
2. В чем отличие между жидкостью и газом?
3. Что такое «реальная жидкость» и «идеальная жидкость»?
4. Перечислите физические свойства жидкостей и приведите их единицы измерения.

5. Что такое плотность жидкости и от чего она зависит?
6. Что такое удельный вес, как он связан с плотностью?
7. Дайте определение вязкости.
8. От чего зависит величина кинематической и динамической вязкости и как они связаны между собой.
9. Дайте определение поверхностного натяжения жидкости.
10. Чем обусловлено капиллярное поднятие (опускание) жидкостей.

### **Материалы практических занятий**

**Задача 1.1.1** В резервуар, содержащий 125 м<sup>3</sup> жидкости плотностью 1760 кг/м<sup>3</sup>, закачано 224 м<sup>3</sup> жидкости плотностью 1848 кг/м<sup>3</sup>. Определить плотность получившейся смеси.

**Решение.**

Плотность смеси определяется по формуле

$$\rho_{\text{см}} = (m_1 + m_2)/(V_1 + V_2)$$

где  $m_1, m_2$  – масса первой и второй жидкостей;  $V_1, V_2$  – объем первой и второй жидкостей.

Так как  $m = \rho V$ , тогда

$$\rho_{\text{см}} = (\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2)/(V_1 + V_2)$$

$$\rho_{\text{см}} = (1760 \cdot 125 + 1848 \cdot 224)/(125 + 224) = 1816 \text{ (кг/м}^3\text{)}$$

**Задача 1.1.2** Определить плотность воздуха при нормальных условиях, если он содержит 78% азота, 21% кислорода, 0,9% аргона, 0,03% углекислого газа, остальное – водяной пар. Плотности газов, соответственно, 1,251 кг/м<sup>3</sup>, 1,429 кг/м<sup>3</sup>, 1,783 кг/м<sup>3</sup>, 1,977 кг/м<sup>3</sup>, 0,579 кг/м<sup>3</sup>.

**Решение**

Плотность смеси газов определяется по формуле

$$\rho_{\text{см}} = \rho_1 n_1 + \rho_2 n_2 + \rho_3 n_3 + \rho_4 n_4 + \rho_5 n_5 = 1,251 \cdot 0,78 + 1,429 \cdot 0,21 + 1,783 \cdot 0,009 + 1,977 \cdot 0,0003 + 0,579 \cdot 0,0007 = 1,293 \text{ (кг/м}^3\text{)}$$

**Задача 1.1.3** Вертикальный цилиндрический резервуар заполнен жидкостью при температуре 10 °С на высоту 4 м. Коэффициент температурного расширения жидкости  $\beta_t = 0,00072 \text{ 1/}^\circ\text{С}$ . До какой температуры может быть нагрета жидкость, если повышение уровня жидкости допускается не более чем на 5 см.

**Решение.**

Изменение объема  $\Delta V$  при изменении температуры  $\Delta t$  из формулы

$$\Delta V = \beta_t V_0 \Delta t.$$

Начальный объем  $V_0 = FH_0$ , изменение объема  $\Delta V = F\Delta H$ .

$$\text{Приравняем } F\Delta H = \beta_t V_0 \Delta t \Rightarrow \Delta t = F\Delta H / \beta_t V_0 = F\Delta H / \beta_t FH_0 = \Delta H / \beta_t H_0$$

Изменение температуры  $\Delta t = 0,05 / (0,00072 \cdot 4) = 17,4 \text{ (}^\circ\text{С)}$ . Конечная температура  $t = t_0 + \Delta t = 10 + 17,4 = 27,4 \text{ (}^\circ\text{С)}$ .

**Задача 1.1.4.** Объем 5 т бензина при атмосферном давлении составляет 7,3 м<sup>3</sup>. Каким будет объем этого же количества бензина при повышении давления на  $\Delta p = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Па}$ , учитывая, что коэффициент объемного сжатия бензина  $4,9 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2/\text{Н}$ . Как при этом изменится плотность бензина?

**Решение.**

Уменьшение объема бензина при повышении давления на  $\Delta p$  составит

$$\Delta V = \beta_p V_0 \Delta p = 4,9 \cdot 10^{-10} \cdot 7,3 \cdot 1,5 \cdot 10^5 = 5,4 \cdot 10^{-4} \text{ (м}^3\text{)} = 0,54 \text{ (л)}$$

Объем бензина при повышении давления

$$V = V_0 - \Delta V = 7300 - 0,54 = 7299,46 \text{ (л)}$$

Плотность бензина при атмосферном давлении

$$\rho_0 = m/V_0 = 5000/7,3 = 684,9 \text{ (кг/м}^3\text{)}$$

Плотность бензина при повышении давления

$$\rho = m/V = 5000/7,299 = 685 \text{ (кг/м}^3\text{)}$$

Следовательно, при повышении давления на  $\Delta p = 1,5 \cdot 10^5$  Па плотность бензина увеличилась на  $0,1 \text{ кг/м}^3$ .

**Решить самостоятельно задачи:**

*Задача 1.1.5.* Определить плотность молока, если 10 л его имеют массу 10,2 кг

*Задача 1.1.6.* Вода при температуре  $50^\circ\text{C}$  имеет удельный вес  $\gamma = 9692 \text{ Н/м}^3$ . Определить ее плотность при этой температуре.

*Задача 1.1.7.* Определить удельный объем жидкости плотностью  $1120 \text{ кг/м}^3$ . Какой объем занимают 500 кг этого вещества.

*Задача 1.1.8.* Определить коэффициент кинематической вязкости молока плотностью  $1020 \text{ кг/м}^3$ , если его коэффициент динамической вязкости равен  $0,002 \text{ Па}\cdot\text{с}$ .

*Задача 1.1.9.* Удельный вес ртути при  $t = 20^\circ\text{C}$  равен  $132,9 \text{ кН/м}^3$ . Определить ее плотность при этой температуре.

*Задача 1.1.10.* Определить удельный вес жидкости, если динамическая вязкость жидкости  $\mu = 0,001 \text{ Па}\cdot\text{с}$ , а кинематическая вязкость  $\nu = 1,02 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ .

*Задача 1.1.11.* Удельный вес нефти при температуре  $15^\circ\text{C}$  равен  $8830 \text{ Н/м}^3$ . Кинематическая вязкость  $0,4 \text{ см}^2/\text{с}$ . Определить динамическую вязкость нефти.

*Задача 1.1.12.* К  $30 \text{ м}^3$  цельного молока плотностью  $1030 \text{ кг/м}^3$  добавлено  $10 \text{ м}^3$  сливок плотностью  $960 \text{ кг/м}^3$ . Определить плотность нормализованного молока.

*Задача 1.1.13.* Определить массу 20 л жидкости, удельный вес которой  $9700 \text{ Н/м}^3$ .

*Задача 1.1.14.* Определить высоту капиллярного поднятия воды в слое грунта, если капиллярные свойства данного грунта определяются условным капилляром, имеющим диаметр  $0,001 \text{ см}$ .

*Задача 1.1.15.* Вертикальный цилиндрический резервуар заполнен спиртом температурой  $t = 5\text{ }^{\circ}\text{C}$  на высоту 1 м. Определить высоту спирта при повышении температуры до  $25\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Расширение резервуара не учитывать. Коэффициент температурного расширения спирта  $\beta_t = 0,0011\text{ }1/^{\circ}\text{C}$ .

*Задача 1.1.16.* При гидравлическом испытании трубопровода длиной  $L = 300\text{ м}$  и диаметром  $d = 500\text{ мм}$  давление поднято до 4 МПа. Какой объем воды потребовалось подать в трубопровод за время подъема давления до назначенной величины. Расширение трубы не учитывать.

*Задача 1.1.17.* Объем бензина при температуре  $15^{\circ}\text{C}$  составляет  $33,5\text{ м}^3$ . Каким будет объем этого же количества бензина при температуре  $5^{\circ}\text{C}$ , учитывая, что коэффициент температурного расширения бензина  $\beta_t = 0,00065\text{ }1/^{\circ}\text{C}$ .

*Задача 1.1.18.* Горизонтальный трубопровод диаметром  $d = 400\text{ мм}$  и длиной  $L = 500\text{ м}$  наполнен стоячей водой. Температура воды  $5\text{ }^{\circ}\text{C}$ , давление  $p = 4 \cdot 10^5\text{ Па}$ . Определить давление в трубе при нагревании воды до  $15\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Деформацией стенок трубопровода пренебречь.

## 1.2 Гидростатическое давление.

### Жидкости

В гидростатике изучаются законы равновесия жидкости, находящейся в абсолютном или относительном покое, под действием внешних и внутренних сил, а также условия равновесия тел, погруженных в жидкость [5, 7].

Основным понятием гидростатики является понятие гидростатического давления. Рассмотрим некоторый объем жидкости, находящийся в покое (Рисунок 1.2.1). Разделим его плоскостью  $AB$  на две части. Верхняя часть I действует на нижнюю II по плоскости раздела  $AB$  с силой  $P$ .

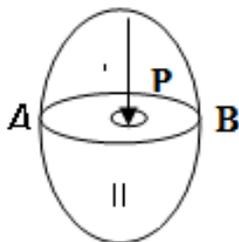


Рисунок 1.2.1 – К понятию гидростатическое давление жидкости

Для нижней части сила  $P$  является внешней поверхностной силой и называется суммарным гидростатическим давлением. Разделив равнодействующую сил гидростатического давления на площадь рассматриваемой поверхности, получим среднее гидростатическое давление:

$$p_{\text{ср.}} = P/F$$

При уменьшении значения площади  $F$  до нуля значение  $p_{\text{ср}}$  будет стремиться к определенному пределу, называемому гидростатическим давлением в точке или просто гидростатическим давлением  $p$ :

$$p = \lim_{F \rightarrow 0} (P/F)$$

Единица измерения гидростатического давления  $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$  ( $10^3 \text{ Па} = 1 \text{ кПа}$ ,  $10^6 \text{ Па} = 1 \text{ МПа}$ ,  $1 \text{ атм} = 1 \text{ бар} = 0,1 \text{ МПа} = 100 \text{ кПа}$ ).

Гидростатическое давление обладает двумя свойствами [5].

Всегда действует нормально площадке и является сжимающим, т. е. оно направлено по нормали внутрь рассматриваемого объема жидкости.

Для доказательства этого положения рассмотрим силу давления  $P$ , действующую на поверхность выделенной внутри покоящейся жидкости малой площадки  $dF$  (Рисунок 1.2.2).

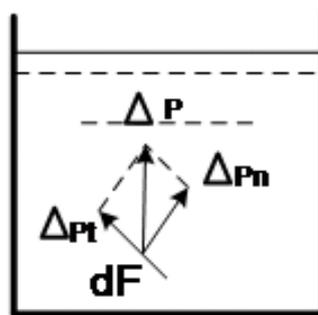


Рисунок 1.2.2– Действие гидростатического давления

Если предположить, что сила  $P$  направлена не по нормали к площадке, то ее можно разложить на две составляющие: нормальную  $P_n$  и касательную  $P_\tau$ . Поскольку в покоящейся жидкости нет сил сопротивления сдвигающим усилиям, то наличие касательной составляющей  $P_\tau$  вывело бы жидкость из состояния равновесия, вследствие чего она стала бы двигаться вдоль площадки, что противоречит предположению о неподвижности жидкости (в гидростатике рассматривается только неподвижная жидкость). Следовательно, такой составляющей не существует, а действует только сила  $P_n$ .

В любой точке покоящейся жидкости давление не зависит от ориентации площадки, на которую оно действует, т. е. оно действует одинаково по всем направлениям.

Выделим в объеме покоящейся жидкости около точки  $M$  бесконечно малую призму с площадью сечения  $\delta F$  (Рисунок 1.2.3). Боковые грани призмы параллельны свободной поверхности жидкости. Один из торцов призмы

перпендикулярен боковым граням, другой наклонен под углом  $\alpha$ . Средние гидростатические давления на торцы граней обозначим через  $p$  и  $p_1$ . Сумма проекций всех сил, действующих на призму вдоль горизонтальной оси (из условия равновесия призмы), равна нулю, т. е.:

$$p\delta F - p_1\delta F_1 \cos\alpha = 0$$

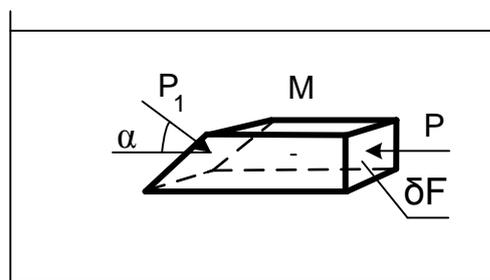


Рисунок 1.2.3– Направление гидростатического давления

Поскольку  $\delta F_1 \cos\alpha = \delta F$  (как бесконечно малые величины), то  $p - p_1 = 0$  или  $p = p_1$ . Аналогично это можно доказать для других направлений. Следовательно, давление в точке по всем направлениям одинаково и не зависит от угла наклона площадки.

Гидростатическое давление в точке зависит только от ее координат в пространстве т. е.  $p = f(x, y, z)$ .

На все тела, находящиеся на поверхности земли, действует атмосферное давление  $p_{\text{атм}}$ . Это давление измеряется барометром, поэтому его называют еще барометрическим давлением. Значение атмосферного давления зависит от высоты измерения: по мере удаления от поверхности земли оно уменьшается. В гидравлике при расчетах принимают атмосферное давление равным 98100 Па  $\approx 100$  кПа. Любое давление выше атмосферного является дополнительным к атмосферному, т. е. избыточным. Избыточное давление измеряют с помощью прибора, называемого манометром (существуют жидкостные и механические манометры). Поэтому избыточное давление называют также манометрическим и обозначают  $p_{\text{ман}}$  или  $p_{\text{изб}}$ . Сумму атмосферного и манометрического давлений называют полным или абсолютным дав-

лением

$$p_{\text{абс.}} = p_{\text{атм.}} + p_{\text{ман.}} \quad (1.2.1)$$

Если процессы протекают при давлении меньше атмосферного (вакуум-насосы, вакуум-котлы и т. д.), то наблюдается недостаток давления до атмосферного, т. е. вакуум

$$p_{\text{вак.}} = p_{\text{атм.}} - p_{\text{абс.}} \quad (1.2.2)$$

Тогда абсолютное давление равно разности

$$p_{\text{абс.}} = p_{\text{атм.}} - p_{\text{вак.}} \quad (1.2.3)$$

Чтобы определить давление в произвольной точке покоящейся жидкости, достаточно знать значение давления в какой-нибудь другой точке, принадлежащей тому же объему, а также глубину погружения одной точки относительно другой.

Пусть в открытом сосуде находится в покое однородная жидкость (Рисунок 1.2.4).

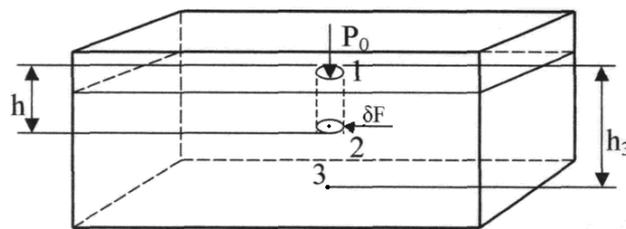


Рисунок 1.2.4 – К выводу основного уравнения гидростатики

На поверхность жидкости в точке  $1$  действует давление находящегося над жидкостью газа  $p_0$ . Если газ свободно сообщается с атмосферой, то  $p_0 = p_{\text{атм.}}$ . Определим абсолютное (полное) давление  $p_2$ , действующее на точку  $2$ , находящуюся внутри жидкости. Выделим около точки  $2$  площадку  $\delta F$  и рассмотрим равновесие вертикального цилиндрического объема жидкости, построенного на этой площадке. На этот цилиндрический объем сверху действует сила внешнего давления  $p_0 \delta F$ , снизу (на нижнее основание) – сила

гидростатического давления  $p_2\delta F$ , направленная по нормали внутрь объема (т. е. вверх), и вес жидкости в объеме цилиндра  $G = \rho gh\delta F$ . Условие равновесия выделенного объема записывается в следующем виде:

$$p_2\delta F - p_0\delta F - \rho gh\delta F = 0$$

$$\text{или } p_2 = p_0 + \rho gh.$$

В общем виде для любой точки покоящейся жидкости  $p = p_0 + \rho gh$   
(1.2.4)

Эта зависимость называется **основное уравнение гидростатики**. Из него следует, что абсолютное давление в любой точке жидкости на глубине  $h$  равно сумме поверхностного давления  $p_0$  и избыточного давления  $\rho gh$ , созданного весом столба жидкости. С увеличением значения  $h$  давление жидкости возрастает по линейному закону.

Из уравнения (1.2.4) также следует, что точки, расположенные на одной глубине от свободной поверхности, испытывают одинаковое гидростатическое давление. Совокупности точек с равным гидростатическим давлением образуют поверхности равного давления (эквипотенциали). В данном случае такими поверхностями являются горизонтальные плоскости, в том числе и свободная поверхность жидкости.

Основное уравнение гидростатики можно представить и в другом виде. Для этого выберем произвольную горизонтальную плоскость сравнения  $0 - 0$  и от нее будем вести отсчет координаты  $Z$ , (Рисунок 1.2.5).

Поскольку  $h = Z - Z_0$ , то уравнение (2.4) можно записать в следующем виде:

$$p = p_0 + \rho g(Z_0 - Z) \text{ или}$$

$$p + \rho gZ = p_0 + \rho gZ_0,$$

разделив обе части на  $\rho g$ , получим

$$Z + \frac{p}{\rho g} = Z_0 + \frac{p_0}{\rho g} \quad (1.2.5)$$

В связи с тем, что для любой точки жидкости координаты свободной поверхности  $Z_0$  и давление  $p_0$  неизменно, то для рассматриваемого объема жидкости основное уравнение гидростатики имеет следующий вид

$$Z + \frac{p}{\rho g} = const \quad (1.2.6)$$

где  $Z$  – геометрическая (нивелирная) высота;  $p/\rho g$  – пьезометрическая высота;  $Z + (p/\rho g)$  – гидростатический напор жидкости.

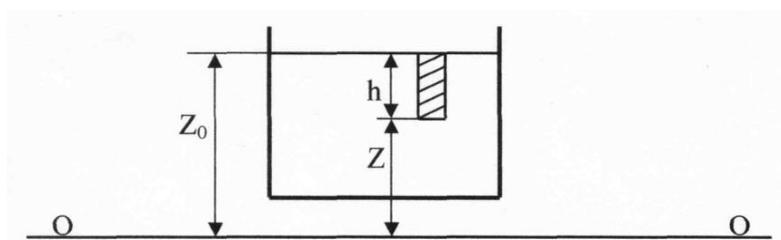


Рисунок 1.2.5 – Расчетная схема к основному уравнению гидростатики

Из зависимости (1.2.5) следует, что поверхностное давление  $p_0$  передается в любую точку внутри жидкости без изменения, т. е. для всех точек объема жидкости  $p_0$  одинаково. Например, для точки 2 (см. Рисунок 1.2.4)

$$p_2 = p_0 + \rho g h_2, \text{ для точки 3 } p_3 = p_0 + \rho g h_3 \text{ и т. д.}$$

Это свойство жидкостей отражает сущность **закона Паскаля**: давление, приложенное к внешней поверхности жидкости, находящейся в покое, передается всем точкам внутри этой жидкости без изменения.

Закон Паскаля широко используется в технике при конструировании различных гидростатических машин и установок, действие которых основано на равномерном распределении давления внутри неподвижной жидкости. Например, в гидравлических прессах (Рисунок 1.2.6), гидроаккумуляторах и т. д.

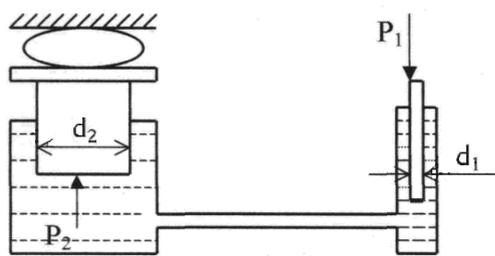


Рисунок 1.2.6 – Схема гидравлического пресса

Давление под первым поршнем равно  $p_1 = P_1/F_1$ . По закону Паскаля это давление передается всем точкам жидкости, в том числе на второй поршень. Тогда сила давления на второй поршень

$$P_2 = p_1 F_2 = \left( \frac{P_1}{F_1} \right) F_2 = P_1 \left( \frac{F_2}{F_1} \right) = P_1 \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^2.$$

Следовательно, сила  $P_2$  во столько раз больше силы  $P_1$  во сколько раз площадь поршня  $F_2$  больше площади поршня  $F_1$ . Действительная сила  $P_2$  несколько меньше расчетной, вследствие трения в движущихся частях поршня и утечек жидкости. Эти потери учитываются КПД ( $\eta = 0,75-0,85$ ). Тогда

$$P_2 = P_1 \left( \frac{F_2}{F_1} \right) \eta.$$

Для измерения давления в жидкости служат различные по принципу действия и по характеру измеряемой величины приборы. Все они измеряют разность давлений между двумя точками, в одной из которых давление может быть атмосферным. В жидкостных приборах (манометрах, пьезометрах) давление уравнивается весовым давлением столба жидкости.

*Пьезометры* состоят из стеклянной трубки диаметром не менее 0,5 см, прикрепленной к доске с нанесенной на ней измерительной шкалой, и специального патрубка, с помощью которого стеклянная трубка соединяется с резервуаром в том месте, где необходимо измерить давление. Их применяют в лабораторных гидравлических исследованиях для измерения

давлений до 30 ... 40 кПа.

Верхний конец стеклянной трубки остается открытым и сообщается с атмосферой. Если пьезометр подключить к резервуару, то жидкость в трубке поднимется на некоторую высоту  $h_p$ , которая называется пьезометрической высотой.

Избыточное гидростатическое давление в точке резервуара, к которой подключен пьезометр, определяют по следующей формуле:

$$p_{изб} = \rho g h_p$$

*Манометры* бывают жидкостные и механические. Жидкостные манометры обычно заполняются ртутью или спиртом, т. е. жидкостями, отличными от тех, в которых измеряется давление.

Механические манометры делятся на пружинные и мембранные. Они служат для измерения давлений свыше 400 кПа.

### **Контрольные вопросы**

1. Что такое гидростатическое давление?
2. Перечислите единицы измерения гидростатического давления.
3. Какими свойствами обладает гидростатическое давление?
4. Что такое абсолютное давление?
5. Как определяется манометрическое давление?
6. Дайте понятие вакуумметрического давления.
7. Чему равна величина атмосферного давления?
8. Приведите основное уравнение гидростатики.
9. Сформулируйте закон Паскаля.
10. В каких технических устройствах используется закон Паскаля?
11. Какими приборами измеряется гидростатическое давление?
12. Что изучает гидростатика?

## Материалы практических занятий

**Задача 1.2.1** Определить удельный вес жидкости при помощи сообщающихся сосудов. В правое колено налита ртуть, а в левое жидкость.

Удельный вес ртути равен  $133 \text{ кН/м}^3$ , высота столба ртути  $h_2$  над поверхностью раздела составляет  $50 \text{ мм}$ , а высота столба жидкости  $h_1 = 550 \text{ мм}$ .

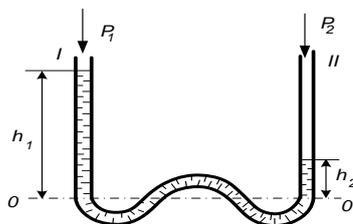


Рисунок 1.2.7 – Схема к задаче 1.2.1

*Решение.*

Составим уравнение равновесия жидкости в сообщающихся сосудах относительно плоскости раздела  $O - O$

$$\rho_{ж}gh_1 = \rho_pgh_2 = \gamma_{ж}h_1 = \gamma_p h_2.$$

Откуда

$$\gamma_{ж} = \gamma_p h_2 / h_1 = 133 \cdot 0,05 / 0,55 = 12,09 \text{ кН/м}^3$$

**Задача 1.2.2.** Определить разность давлений в сосудах  $C$  и  $D$ , если их центры расположены на расстоянии  $z$ , а разность уровней рабочей жидкости в дифференциальном манометре  $h$ .

Плотность рабочей жидкости  $\rho_1$ . Сосуды заполнены водой. Выполнить вычисления при следующих данных: а)  $z = 0$ ,  $\rho_1 = 850 \text{ кг/м}^3$ ,  $h = 0,2 \text{ м}$ ; б)  $z = 0,5 \text{ м}$ ,  $\rho_1 = 13600 \text{ кг/м}^3$ ,  $h = 0,1 \text{ м}$

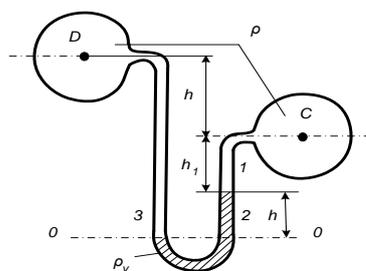


Рисунок 1.2.8 – Схема к задаче 1.2.2

*Решение.*

Весовое давление столба жидкости высотой  $h$  уравнивает разность давлений в точках 1 и 2. В точках 2 и 3 давление одинаковое, т.к. они расположены в одной плоскости.

Обозначив через  $h_1$  расстояние от точки С до первой границы раздела запишем уравнение равновесия относительно линии О – О.

$$p_D + \rho g(h + h_1 + z) = p_C + \rho g h_1 + \rho_1 g h.$$

Отсюда

$$p_D - p_C = (\rho_1 - \rho) g h - \rho g z.$$

Если  $z = 0$ , т.е. сосуды находятся на одном уровне

$$p_D - p_C = (\rho_1 - \rho) g h.$$

Из уравнения видно, что при  $\rho_1 < \rho$  давление в сосуде  $D$  меньше, чем в сосуде  $C$  и наоборот.

При заданных числовых значениях получим

$$\text{а) } p_C - p_D = (1000 - 850) \cdot 9,81 \cdot 0,2 = 294,39 \text{ (Па);}$$

$$\text{б) } p_D - p_C = (13600 - 1000) \cdot 9,81 \cdot 0,1 - 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,5 = 7455,6 \text{ (Па).}$$

*Задача 1.2.3.* Жидкость плотностью  $\rho_1$  находится в равновесии в сосуде, к которому подключен прибор для измерения давления. Его левая трубка заполнена жидкостью. Рабочая жидкость в U-образной трубке имеет плотность  $\rho_2$ . Граница раздела жидкостей находится выше центра сосуда на высоте  $h_1 = 0,4$  м, разность уровней рабочей жидкости  $h_2 = 0,1$ .

Определить манометрическое давление или вакуум в центре сосуда при следующих условиях: а)  $\rho_1 = 1000 \text{ кг/м}^3$ ;  $\rho_2 = 800 \text{ кг/м}^3$ ; б)  $\rho_1 = 900 \text{ кг/м}^3$ ;  $\rho_2 = 13600 \text{ кг/м}^3$ .

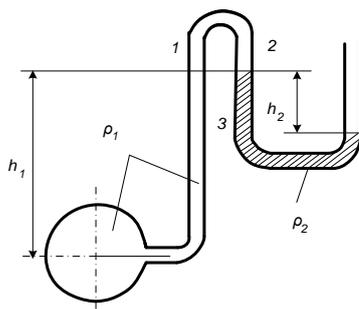


Рисунок 1.2.9 – Схема к задаче 1.2.3

*Решение.*

Давление в точке 1 меньше, чем в центре сосуда, на весовое давление столба жидкости плотностью  $\rho_1$  и высотой  $h_1$ , так как эта точка расположена выше. В точке 2, находящейся на том же уровне и в той же жидкости, давление такое же (весовое давление столбов жидкости в колене взаимно уравновешивается).

$$\text{Таким образом } p_2 = p_1 = p - \rho_1 g h_1.$$

В точке 3 давление увеличивается на весовое давление столба жидкости плотностью  $\rho_2$  и высотой  $h_2$ :

$$p_3 = p_2 + \rho_2 g h_2.$$

Такое же давление на свободной поверхности в пьезометре, так как она находится на уровне точки 3. Но здесь давление атмосферное. В результате получаем

$$p - \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 = p_{\text{ат}}.$$

Отсюда избыточное (манометрическое) давление в сосуде

$$p_{\text{ман}} = p - p_{\text{ат}} = \rho_1 g h_1 - \rho_2 g h_2.$$

Из уравнения видно, что при  $\rho_2 > \rho_1$  разность может быть и отрицательной, тогда прибор измеряет вакуум в сосуде:

$$p_{\text{вак}} = p_{\text{ат}} - p = \rho_2 g h_2 - \rho_1 g h_1.$$

При заданных числовых значениях получим:

а) манометрическое давление

$$p_{\text{ман}} = 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,4 - 800 \cdot 9,81 \cdot 0,1 = 3139 \text{ (Па)};$$

б) вакуум

$$p_{\text{вак}} = 13600 \cdot 9,81 \cdot 0,1 - 900 \cdot 9,81 \cdot 0,4 = 9810 \text{ (Па)}.$$

**Решить самостоятельно задачи:**

*Задача 1.2.4.* Определить абсолютное и избыточное давление в точке, расположенной на глубине 1 м в открытом сосуде с водой в обычных условиях.

*Задача 1.2.5.* К закрытому герметически сосуду с водой присоединена открытая стеклянная трубка – пьезометр.

Определить высоту столба воды в пьезометре над уровнем жидкости, если давление на поверхности воды  $p_0 = 106$  кПа.

*Задача 1.2.6.* К сосуду с водой на одном и том же уровне присоединены две стеклянные трубки – пьезометры.

Одна трубка имеет открытый конец, а другая запаяна и из нее полностью выкачан воздух.

Определить давление в точках присоединения пьезометров и высоту столба воды в трубках, если расстояние от точек присоединения трубок до поверхности воды в сосуде  $h = 0,6$  м, давление на поверхности воды в сосуде  $p_0 = 120$  кПа.

*Задача 1.2.7.* В баллоне с воздухом давление  $p$  меньше атмосферного. Присоединенная к баллону трубка опущена в сосуд с водой.

Под действием атмосферного давления жидкость поднимается в трубке на высоту  $h$ .

Определить на какую высоту поднимется вода, если  $p = 90,2$  кПа.

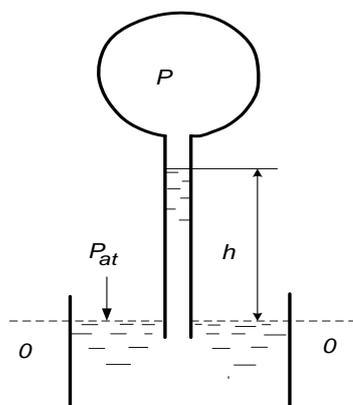


Рисунок 1.2.10 – Схема к задаче 1.2.7

*Задача 1.2.8.* В сообщающиеся сосуды (см. Рисунок 1.2.7) налиты две несмешивающиеся жидкости с относительной плотностью  $\rho_1/\rho_2 = 1,3$ .

Уровень свободной поверхности первой жидкости установился на высоте  $h_1 = 0,5$  м над поверхность раздела 0 – 0. Определить разность уровней  $h_1 - h_2$ .

*Задача 1.2.9.* Определить давление на дно открытого сосуда, наполненного двумя несмешивающимися жидкостями.

Плотность жидкостей  $\rho_1 = 900$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_2 = 1100$  кг/м<sup>3</sup>; толщина каждого слоя  $h_1 = 0,5$  м,  $h_2 = 0,2$  м

*Задача 1.2.10.* В сообщающиеся сосуды, один из которых открыт, налито масло ( $\rho = 870$  кг/м<sup>3</sup>).

Второй сосуд герметически закрыт и внешнее давление в нем  $p_0 = 106$  кПа. Определить высоту масла  $h_1$  в 1-м сосуде, если во 2-м сосуде высота  $h_2 = 1,2$  м.

*Задача 1.2.11.* Определить высоту на которую опустится уровень воды в вакуумметре, присоединенном к баллону, давление на поверхности жидкости в котором  $p_0 = 96$  кПа, точка A погружена на глубину 0,3 м.

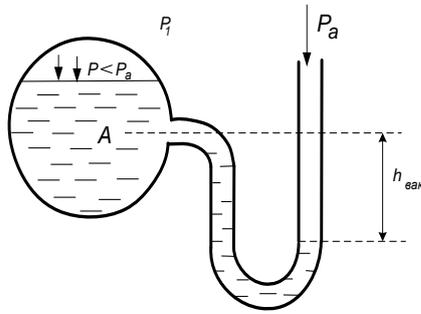


Рисунок 1.2.11 – Схема к задаче 1.2.11

*Задача 1.2.12.* Избыточное давление в море на глубине 300 м составляет 3,1 МПа. Определить плотность морской воды.

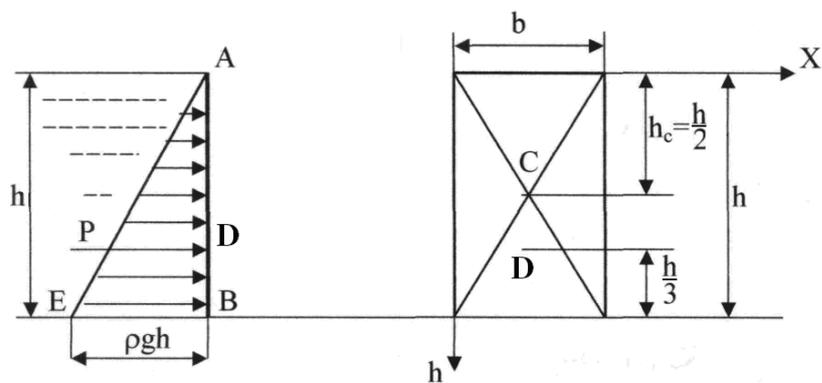
*Задача 1.2.13.* Определить избыточное давление в скважине на глубине 3600 м, если скважина заполнена глинистым раствором плотностью  $\rho = 1600$  кг/м<sup>3</sup>.

*Задача 1.2.14.* На какую величину снизится избыточное давление в скважине глубиной 3200 м, если глинистый раствор плотностью 1600 кг/м<sup>3</sup> заменить водой.

*Задача 1.2.15.* Чему равно манометрическое давление воды в точке, к которой подключен открытый пьезометр, если его показание 180 см.

### 1.3 Давление жидкости на плоские и криволинейные поверхности

При расчете резервуаров и различных емкостей для хранения жидкостей требуется знать полное давление жидкости на ограничивающие ее твердые стенки и точку приложения равнодействующей сил давления. Пусть задана плоская вертикальная стенка  $AB$  (Рисунок 1.3.1).



а)

б)

Рисунок 1.3.1. – К определению силы гидростатического давления на плоскую поверхность

где а) эпюра гидростатического давления;  
 б) положение центров тяжести и давления.

Гидростатическое давление жидкости на всей площади поверхности стенки складывается из суммы гидростатических давлений во всех ее точках и называется суммарным давлением жидкости. Для определения этого давления необходимо установить, как оно распределяется по поверхности тела, на которое воздействует жидкость. Графическое изображение распределения давления по высоте тела, например, стенки, называется эпюрой гидростатического давления (см. Рисунок 1.3.1,а).

Гидростатическое давление в точке жидкости, расположенной на любой глубине от свободной поверхности, может быть определено по формуле (1.2.4)

$$p = p_0 + \rho gh$$

Поверхностное давление в открытом сосуде, равное атмосферному давлению  $p_0 = p_{\text{атм}}$  передается в любую точку жидкости без изменения и является постоянным. Избыточное гидростатическое давление  $\rho gh$  пропорционально глубине погружения точки, т. е. изменение его значения по глубине подчинено линейному закону.

Атмосферное давление  $p_{\text{атм}}$ , действующее на свободную поверх-

ность жидкости и полностью передающееся в любую точку на стенке внутри жидкости, уравновешивается таким же атмосферным давлением, действующим снаружи на стенку сосуда. Поэтому при расчете стенок на прочность и устойчивость определяют и учитывают только избыточное давление  $p = \rho gh$ .

Эпюра избыточного гидростатического давления на вертикальную стенку сосуда приведена на Рисунок 1.3.1, а.

Избыточное давление в точке  $A$  равно:

$$p_A = 0(h = 0),$$

а в точке  $B$  равно:

$$p_B = \rho gh.$$

В каждой точке жидкости давление нормально к поверхности стенки, поэтому на нормали к точке  $B$  откладываем в принятом масштабе отрезок  $BE$ , равный  $\rho gh$ , и соединяем прямой с точкой  $A$ . Треугольник  $ABE$  показывает распределение избыточного гидростатического давления по высоте стенки.

Каждая ордината этого треугольника представляет собой избыточное давление в соответствующей точке стенки, а площадь треугольника - силу суммарного избыточного давления жидкости на стенку в перпендикулярной ей плоскости. Если эту площадь умножить на ширину стенки  $b$ , то получим силу гидростатического давления, действующую на стенку сосуда:

$$P = F_{\text{эн}} b = \frac{1}{2} \rho gh^2 b$$

Однако  $\frac{1}{2} h = h_c$ ,  $hb = F$ , следовательно

$$P = \rho gh_c F, \quad (1.3.1)$$

где  $F$  – площадь стенки, находящейся под поверхностью жидкости;  $h_c$  – глубина погружения центра тяжести плоской поверхности.

**Сила избыточного давления**, оказываемая на плоскую стенку, находящуюся под воздействием жидкости, равна произведению площади

смоченной поверхности стенки на избыточное гидростатическое давление в ее центре тяжести.

Это правило распространяется и на полное суммарное давление на любую плоскую фигуру, погруженную в жидкость. При учете поверхностного давления абсолютное суммарное давление, действующее на стенку, определяется по формуле:

$$P_{abc} = (p_0 + \rho gh_c)F \quad (1.3.2)$$

Полная сила давления жидкости на плоскую стенку равна произведению площади стенки на гидростатическое давление  $p_c$  в центре тяжести этой площади. Формула (1.3.2) справедлива и для любой наклонной плоскости с произвольными очертаниями.

Если стенка расположена горизонтально, т. е. является горизонтальным дном сосуда, то полная сила давления на дно  $P_{\text{дн}}$  определяется по формулам:

$$P_{\text{дн}} = (p_0 + \rho gh)F \text{ или } P_{\text{дн}} = P_{\text{изб}} = \rho ghF,$$

где  $h$ — высота столба жидкости над дном;  $F$ — площадь дна.

Сила давления на дно  $P_{\text{дн}}$  зависит лишь от плотности жидкости, высоты столба жидкости и площади дна и не зависит от формы дна и объема сосуда. Т. е. для сосудов разной формы давление на дно будет одинаковым, если они имеют одинаковую площадь дна и наполнены одинаковой жидкостью до одного и того же уровня. Это явление называется *гидростатическим парадоксом*, (Рисунок 1.3.2).

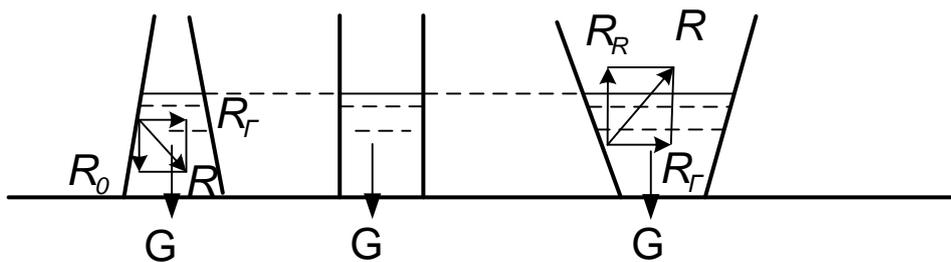


Рисунок 1.3.2. –Гидростатический парадокс

Точка приложения равнодействующей силы давления на стенку называется **центром давления**. Центр давления расположен ниже центра тяжести (точки  $C$ ) (см. Рисунок 1.3.1). Только на горизонтальной стенке (дно сосуда) центр давления совпадает с центром тяжести. Положение центра давления легко определять графически. Равнодействующая сила давления проходит через центр тяжести эпюры. Проекция этого центра на плоскость стенки и есть центр давления. Для прямоугольной стенки равнодействующая силы гидростатического давления и центр давления находятся на расстоянии  $h/3$  от основания или  $2h/3$  от поверхности жидкости.

Координата центра давления, т. е. расстояние от свободной поверхности жидкости до центра давления, может быть определена по формуле

$$y_D = y_c + \frac{I_0}{y_c F}, \quad (1.3.3)$$

где  $y_c$  – расстояние от центра тяжести площади смоченной поверхности стенки до свободной поверхности жидкости;  $I_0$  – момент инерции площади смоченной поверхности стенки относительно горизонтальной оси, проходящей через ее центр тяжести;  $F$  – площадь смоченной поверхности стенки.

Поскольку атмосферное давление, действующее на поверхность жидкости, передается в любую точку стенки  $AB$  внутри жидкости без изменения и уравнивается таким же давлением, действующим на стенку снаружи, определяем только избыточное гидростатическое давление.

Эпюру гидростатического давления на криволинейную стенку, также как и на любую другую, можно построить, используя основное уравнение гидростатики. Давление на криволинейную поверхность в каждой точке направлено по нормали к смоченной поверхности, поэтому силы гидростатического давления в разных точках криволинейной поверхности имеют различное направление.

Для вывода формулы суммарного давления жидкости на криволиней-

ную поверхность рассмотрим криволинейную стенку  $AB$  цилиндрической формы, расположенную перпендикулярно к плоскости чертежа (Рисунок 1.3.3). Вглубь чертежа стенка имеет ширину  $b$ , равную по всей высоте. Поскольку на поверхности жидкости давление равно атмосферному, которое внутри жидкости без изменения передается в любую точку на поверхности стенки и уравнивается атмосферным давлением, действующим на поверхность стенки снаружи, определим только избыточное (весовое) гидростатическое давление.

Для определения полной силы давления исследуем условия равновесия объема жидкости  $ABMN$ , находящегося над рассматриваемой цилиндрической поверхностью  $AB$ . Со стороны жидкости на поверхность стенки действует сила гидростатического давления  $P$ , а со стороны стенки на жидкость действует сила реакции  $R$ , равная силе  $P$ , но противоположная ей по знаку. Разложим эту силу на горизонтальную  $R_H$  и вертикальную  $R_B$  составляющие.

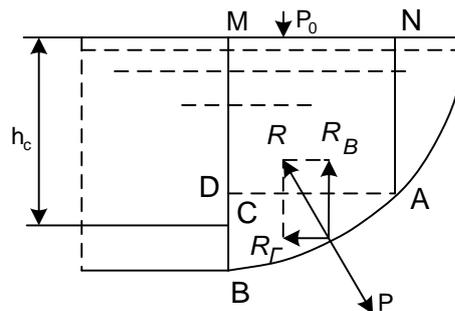


Рисунок 1.3.3 – Сила гидростатического давления на криволинейную поверхность

Составляющая  $R_B$  равна сумме двух сил: силы давления на свободную поверхность на участке  $MN$  и силы тяжести объема жидкости  $ABMN$

$$R_B = p_0 F_2 + G_{ж}, \quad (1.3.4)$$

где  $F_2$  – площадь свободной поверхности на участке  $MN$ ;  $G_{ж}$  – вес объема жидкости.

Реакция  $R_2$  равна силе давления жидкости на участке  $BD$ , так как на участке  $MD$  и  $AN$  эти силы уравниваются. Поскольку площадь  $BD$  является вертикальной проекцией поверхности  $AB$ , то сила, действующая на нее, равна силе давления жидкости на плоскую стенку, т. е.

$$R_2 = p_c F_{BD} = (p_0 + \rho g h_c) F_{BD}, \quad (1.3.5)$$

где  $p_c$  – гидростатическое давление в центре тяжести площади  $BD$ ;  $h_c$  – глубина погружения центра тяжести площади  $BD$ ;  $F_{BD}$  – площадь поверхности стенки  $BD$ .

Если  $p_0 = p_{\text{атм}}$ , то составляющие реакции соответственно равны:

$$R_g = G = \rho g V_{ABMN}; \quad R_2 = \rho g h_c F_{BD}. \quad (1.3.6)$$

Объем  $V_{ABMN}$ , ограниченный криволинейной поверхностью  $AB$ , проекцией ее на плоскость свободной поверхности  $MN$  и вертикальными плоскостями  $AN$  и  $BM$ , называется **телом давления**. Следовательно, вертикальная составляющая суммарного давления жидкости на криволинейную поверхность равна произведению удельного веса этой жидкости на объем тела давления. Если тело давления заполнено жидкостью, то вертикальная составляющая давления направлена вниз, в противном случае – вверх.

Сила гидростатического давления жидкости  $P$  определяется геометрическим сложением, как равнодействующая горизонтальной и вертикальных составляющих:

$$P = R = \sqrt{R_g^2 + R_2^2}. \quad (1.3.7)$$

Для цилиндрических круговых поверхностей равнодействующая сила давления всегда направлена по радиусу. Если жидкость расположена снаружи цилиндрической поверхности, то полная сила гидростатического давления и ее составляющие находятся по тем же формулам, но с обратным знаком.

Направление линии действия силы  $P$  суммарного давления жидкости на цилиндрическую поверхность всегда проходит через центр кривизны криволинейной поверхности. В то же время сила  $P$  проходит через точку пересечения

чения линий действия составляющих  $P_r$  и  $P_v$ . Тогда точка пересечения линии действия суммарной силы давления  $P$  с криволинейной поверхностью является центром давления.

Рассмотрим произвольное тело объемом  $V$ , погруженное в жидкость и найдем силу, действующую на него со стороны жидкости (Рисунок 1.3.4).

Для простоты представим, что в жидкость погружена прямоугольная призма объемом  $V$ .

Силу гидростатического давления можно определить по значениям горизонтальных и вертикальных составляющих. Сумма горизонтальных составляющих равна нулю, так как силы давления на боковые грани равны по величине и противоположны по направлению, т. е. взаимно уравновешиваются. Вертикальные составляющие силы гидростатического давления не одинаковы. На верхнее основание площадью  $F$  сверху вниз действует сила  $P_1 = \rho g h_1 F$ , равная весу жидкости в объеме  $V_1$ . На нижнее основание действует сила  $P_2 = \rho g (h_1 + h)$ , направленная вверх. Причем значение силы  $P_2$  равно весу жидкости в объеме  $(V_1 + V)$ , находящемся над нижним основанием призмы. Поскольку  $P_2 > P_1$ , то равнодействующая сил гидростатического давления направлена по вертикали вверх и равна архимедовой силе:

$$P = P_2 - P_1 = \rho g h F = \rho g V = P_A, (1.3.8)$$

где  $\rho g V$  – вес вытесненной телом жидкости.

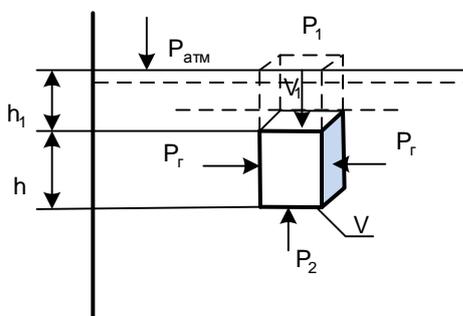


Рисунок 1.3.4 – К пояснению закона Архимеда

**Закон Архимеда** (уравнение (1.3.8)) читается следующим образом: на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, направленная вертикально вверх и равная весу жидкости, вытесненной телом. Закон Архимеда справедлив для тел любой конфигурации, а также для тел, частично погруженных в жидкость [9].

Сила  $P_A$  называется архимедовой или подъемной (выталкивающей) силой. Она приложена в центре тяжести вытесненного объема жидкости, который называется **центром водоизмещения** [9]. Центр водоизмещения обычно не совпадает с центром тяжести тела (кроме однородных тел).

Следовательно, на тело, погруженное в жидкость, действуют две силы:

1. вес тела  $G$ , приложенный в центре тяжести и направленный вниз;
2. подъемная сила  $P_A$ , приложенная в центре водоизмещения и направленная вверх.

**Плаваемостью** называют способность тела плавать в жидкости в погруженном или частично погруженном состоянии. Различают три случая плавания тел:

1)  $G = P_A$  – тело плавает в погруженном состоянии на произвольной глубине (такое состояние называется взвешенным). В этом случае плотности тела  $\rho_T$  и жидкости  $\rho_{ж}$  равны ( $\rho_T = \rho_{ж}$ ), так как  $G = \rho_T g V = P_A = \rho_{ж} g V$ .

2)  $G > P_A$  (или  $\rho_T > \rho_{ж}$ ) – тело тонет, если его вес больше выталкивающей силы или плотность тела больше плотности жидкости.

3)  $G < P_A$  (или  $\rho_T < \rho_{ж}$ ) – тело всплывает и плавает на поверхности в частично погруженном состоянии.

Для равновесия плавающего тела, полностью погруженного в жидкость, кроме равенства  $G = P_A$  необходимо, чтобы и моменты этих сил также компенсировались.

На основе закона Архимеда создана теория плавания тел.

## Контрольные вопросы

1. Как определяется сила гидростатического давления на плоскую поверхность аналитически?
2. Что такое эпюра гидростатического давления?
3. Как определить силу гидростатического давления на криволинейную поверхность?
4. Как определяется сила гидростатического давления на плоскую поверхность графически?
5. Что такое центр давления?
6. Что называется телом давления?
7. Как определяется вертикальная составляющая силы давления на криволинейную поверхность?
8. Как определяется центр давления для криволинейной поверхности?
9. Дайте формулировку закона Архимеда.
10. Что такое центр водоизмещения?

## Материалы практических занятий

*Задача 1.3.1.* Построить эпюру избыточного гидростатического давления на плоскую прямоугольную стенку АВ открытой емкости, если глубина воды в ней 2 м.

*Решение.*

Избыточное давление в точке А  $p_A = 0$ , в точке В  $p_B = \rho gh = 1000 \cdot 9,81 \cdot 2 = 19620$  (Па) = 19,62 (кПа). Выбираем масштаб 1 см = 5 кПа, тогда давление 19,62 кПа изобразится отрезком  $19,62/5 \approx 4$  см.

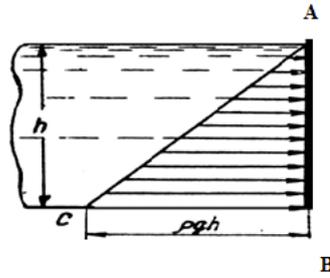


Рисунок 3.5 – Схема к задаче 1.3.1

*Задача 1.3.2.* Построить эпюру избыточного давления воды на наклонную стенку АВ, если  $h_1 = 1,2$  м,  $h = 2,6$  м.

*Решение.*

Избыточное давление в точке А

$$p_A = \rho g h_1 = 1000 \cdot 9,81 \cdot 1,2 = 11772 \text{ (Па)} = 11,8 \text{ (кПа)}$$

$$p_B = 1000 \cdot 9,81 \cdot 2,6 = 25506 \text{ (Па)} = 25,5 \text{ (кПа)}$$

Принимаем масштаб в 1 см - 5 кПа, получим величины отрезков  $11,8/5 = 2,4$  см,  $25,5/5 = 5,1$  см, по которым строим эпюру избыточного давления.

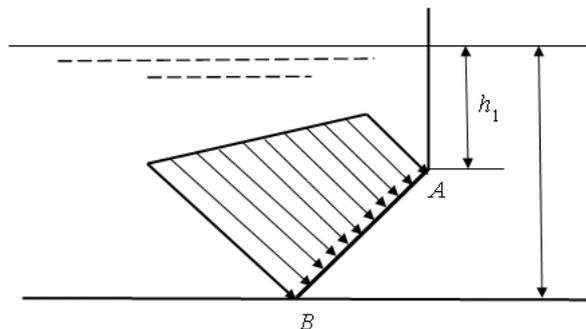


Рисунок 1.3.6 – Схема к задаче 1.3.2

*Задача 1.3.3.* Построить эпюру избыточного давления на стенку ABCD (Рисунок 1.3.7), если  $h_1 = 1,5$  м, а  $h_2 = 2,5$  м

*Решение.*

Избыточное давление в точках В и С равно

$$p_B = p_C = \rho g h_1 = 1000 \cdot 9,81 \cdot 1,5 = 14715 \text{ (Па)} = 14,7 \text{ (кПа)}$$

Давление в точке D

$$p_D = \rho g(h_1 + h_2) = 1000 \cdot 9,81 \cdot 4 = 39240 \text{ (Па)} = 39,2 \text{ (кПа)}$$

Приняв масштаб 1 см - 5 кПа и определив длины отрезков  $14,7/5 = 2,9$  см,  $39,2/5 = 7,8$  см, строим эпюру избыточного гидростатического давления.

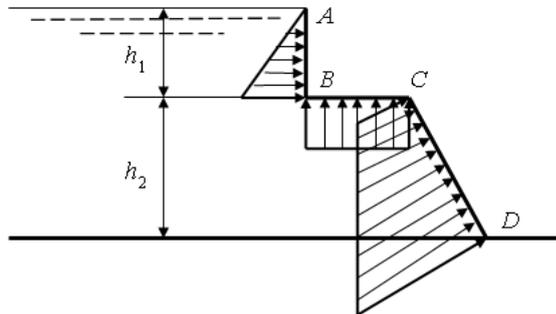


Рисунок 1.3.7 – Схема к задаче 1.3.3

**Задача 1.3.4.** Определить силу избыточного гидростатического давления на боковую стенку открытого прямоугольного призматического резервуара, заполненного молоком на глубину  $h = 2,4$  м, если ширина стенки  $b = 1,5$  м. Определить положение центра давления (рисунок 1.3.8).

*Решение.*

Силу избыточного давления определяем по формуле

$$P = p_c F = \rho_m g h_c F; \quad h_c = h/2; \quad F = bh;$$

$$P = \rho_m g \frac{h}{2} bh = \frac{1}{2} \rho_m g h^2 b = \frac{1}{2} 1025 \cdot 9,81 \cdot 2,4^2 \cdot 1,5 =$$

$$= 43438,7 \text{ (Н)} = 43,4 \text{ кН.}$$

Расстояние от поверхности жидкости до центра давления

$$h_D = h_c + \frac{I_0}{F h_c} = \frac{2}{3} h = \frac{2}{3} 2,4 = 1,6 \text{ м.}$$

Определим силу избыточного давления графо-аналитическим способом

$$P = F_{\text{эп}} b; \quad F_{\text{эп}} = \frac{1}{2} \rho_m g h \cdot h = \frac{1}{2} \rho_m g h^2;$$

$$P = \frac{1}{2} \rho_m g h^2 b = 43,4 \text{ кН.}$$

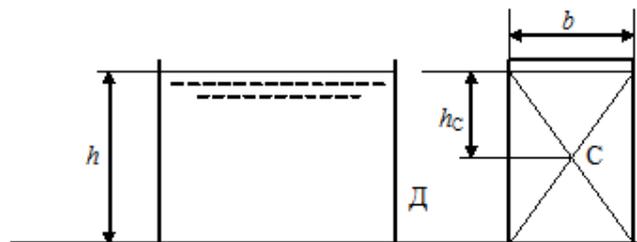


Рисунок 1.3.8 – Схема к задаче 1.3.4

**Задача 1.3.5.** Определить силу абсолютного давления молока на плоскую круглую крышку люка, находящегося в боковой стенке прямоугольного резервуара, если диаметр крышки  $d = 1$  м, глубина погружения центра крышки 2 м. Резервуар герметически закрыт, давление на поверхности молока 120 кПа. Определить положение центра давления.

*Решение.*

Силу абсолютного давления определяем по формуле

$$P = p_c F = (p_0 + \rho_m g h_c) F = (p_0 + \rho_m g h_c) \frac{\pi d^2}{4} =$$

$$= (120000 + 1025 \cdot 9,81 \cdot 2) \cdot 3,14 \cdot 1^2 / 4 = 109986,7 (\text{Н}) = 110 (\text{кН}).$$

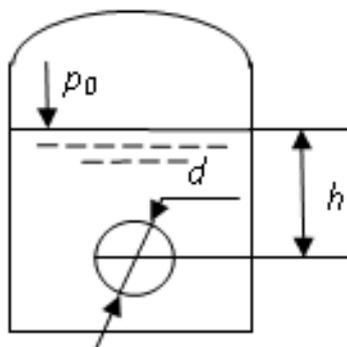


Рисунок 1.3.9. – Схема к задаче 1.3.5

Расстояние от поверхности жидкости до центра давления

$$h_{\text{л}} = h_c + \frac{I_0}{F h_c};$$

$$I_0 = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 1^4}{64} = 0,05 \text{ м}^4; \quad F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 1^2}{4} = 0,785 \text{ м}^2;$$

$$h_{\text{д}} = 2 + \frac{0,05}{0,785 \cdot 2} = 2,03 \text{ м.}$$

*Задача 1.3.6.* Призматическая прямоугольная емкость, заполненная водой, имеет в месте соединения боковой стенки с дном криволинейную цилиндрическую вставку радиусом 1 м, и шириной  $b = 1,2$  м. Определить силу избыточного гидростатического давления, действующего на криволинейную цилиндрическую поверхность вставки, если нижняя точка криволинейной поверхности находится на глубине  $h = 2,5$  м.

*Решение*

1. Определяем горизонтальную составляющую силы гидростатического давления на криволинейную поверхность

$$P_x = p_c F = \rho g h_c r b = \rho g \left( h - \frac{r}{2} \right) r b =$$

$$= 1000 \cdot 9,81 \cdot (2,5 - 0,5) \cdot 1 \cdot 1,2 = 3544 \text{ Н} = 23544 \text{ Н} = 23,54 \text{ кН.}$$

2. Находим вертикальную составляющую силы давления

$$P_z = \rho g V_{\text{т.д.}} = \rho g \left[ r(h - r) + \frac{\pi r^2}{4} \right] b,$$

где  $V_{\text{т.д.}} = F_{\text{т.д.}} b$  – объем тела давления.

$$P_z = 1000 \cdot 9,81 \left[ 1(2,5 - 1) + \frac{3,14 \cdot 1^2}{4} \right] = 26899 \text{ Н} = 26,9 \text{ кН.}$$

3. Вычисляем равнодействующую силу давления воды на криволинейную поверхность

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2} = \sqrt{23,54^2 + 26,9^2} = 35,74 \text{ кН.}$$

4. Определяем положение координат центра давления на криволинейной поверхности относительно ее центра кривизны

$$x = r \cos \alpha = r \frac{P_x}{P} = 1 \frac{23,54}{35,74} = 0,66 \text{ м;}$$

$$z = r \sin \alpha = 1 \frac{26,9}{35,74} = 0,75 \text{ м.}$$

*Задача 1.3.7.* Цилиндрическая цистерна диаметром  $d=2$  м и длиной  $l=5$  м заполнена молоком. Верхний люк открыт в атмосферу. Определить силу  $P$  давления молока на дно (нижнюю половину цилиндрической поверхности) и силу  $G$  тяжести молока, передаваемую на колеса.

*Решение.*

Определяем силу давления молока на дно

$$P_z = \rho g V_{\text{т.д.}}; \quad V_{\text{т.д.}} = \left( \frac{\pi d^2}{8} + d \frac{d}{2} \right) l = \frac{d^2}{2} \left( \frac{\pi}{4} + 1 \right) l;$$

$$P_z = \rho g \frac{d^2}{2} \left( \frac{\pi}{4} + 1 \right) l = 1025 \cdot 9,81 \cdot \frac{2^2}{2} \left( \frac{3,14}{4} + 1 \right) 5 = 179486 \text{ Н} \approx 179,5 \text{ кН.}$$

Находим силу тяжести молока, передаваемую на колеса цистерны

$$G = \rho g V_{\text{ц.}} = \rho g \frac{\pi d^2}{4} l = 1025 \cdot 9,81 \cdot \frac{3,14 \cdot 2^2}{4} \cdot 5 = 157867 \approx 157,9 \text{ кН.}$$

*Задача 1.3.8.* Определить силу избыточного давления, открывающего полусферическую крышку радиусом  $r=1$  м, если уровень воды в пьезометре выше крышки на  $h=1,5$  м

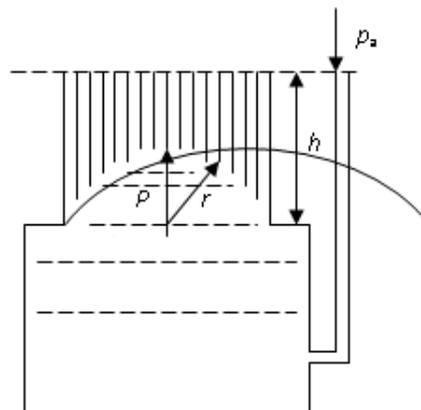


Рисунок 1.3.10 – Схема к задаче 1.3.8

*Решение.*

Горизонтальные составляющие силы давления на данную криволинейную поверхность действуют в противоположных направлениях и уравновешивают друг друга.

Вертикальная составляющая, которая стремится открыть крышку, определяется как

$$P_z = \rho g V_{m.д.};$$
$$V_{m.д.} = V_{ц} - V_{n/сф.} = \pi r^2 h - \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi r^3 = 3,14 \cdot 1 \cdot 1,5 - \frac{2}{3} 3,14 \cdot 1 = 2,62 (\text{м}^3);$$
$$P_z = 1000 \cdot 9,81 \cdot 2,62 = 25702 \text{ Н} = 25,7 \text{ кН}.$$

*Задача 1.3.9.* Определить объем и плотность тела массой 2 кг, если при взвешивании его в воде показание динамометра уменьшилось в 2 раза.

*Решение.*

В воздухе на пружину динамометра действует сила тяжести

$$G = mg = 2 \cdot 9,81 = 19,62 \text{ Н}.$$

В воде, кроме этой силы, на тело действует выталкивающая (архимедова) сила

$$P_A = \rho g V$$

Тогда на пружину динамометра действует сила

$G - P_A = G/2$ , так как показание динамометра уменьшилось в 2 раза.

Отсюда  $P_A = G - 0,5G = 0,5G$ , и

$$\rho g V = 0,5G.$$

Откуда определяем объем тела

$$V = \frac{0,5G}{\rho g} = \frac{0,5 \cdot 19,62}{1000 \cdot 9,81} = 0,001 \text{ м}^3$$

Определяем плотность тела

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{2}{0,001} = 2000 \text{ кг/м}^3.$$

*Задача 1.3.10.* Деревянный призматический брусок высотой  $H = 0,5$  м плавает на поверхности воды. Определить глубину погружения бруска, если плотность дерева  $\rho_d = 900$  кг/м<sup>3</sup>.

*Решение.*

Условие плавания бруска  $G = P_A$ .

Вес бруска

$$G = \rho_d g V_6 = \rho_d g F H,$$

где  $V_6$  – объем бруска;  $F$  – площадь основания бруска.

Архимедова сила определяется как

$$P_A = \rho_v g F h,$$

где  $\rho_v$  – плотность воды;  $h$  – глубина погружения бруска.

Приравняв значения  $G$  и  $P_A$ , выразим  $h$

$$\rho_d g F H = \rho_v g F h \rightarrow h = \frac{\rho_d g F H}{\rho_v g F} = \frac{\rho_d H}{\rho_v} = \frac{900 \cdot 0,5}{1000} = 0,45 \text{ м.}$$

*Задача 1.3.11.* Полый цилиндрический поплавок, изготовленный из стали толщиной  $t = 1$  мм плавает на поверхности воды. Определить глубину погружения поплавка, если его диаметр 20 см, а высота  $H = 10$  см. Плотность стали 7800 кг/м<sup>3</sup>, плотность воздуха 1,293 кг/м<sup>3</sup>.

*Решение.*

Объем стали поплавка

$$V_{ст} = \pi d H t + 2 \frac{\pi d^2}{4} t = \pi d t \left( H + \frac{d}{2} \right) = 3,14 \cdot 0,2 \cdot 0,001 (0,1 + 0,1) = 0,000126 \text{ м}^3.$$

Вес стали

$$G_{ст} = \rho_{ст} g V_{ст} = 7800 \cdot 9,81 \cdot 0,000126 = 9,64 \text{ Н.}$$

Объем воздуха в поплавке

$$V_{\text{возд.}} = \frac{\pi(d - 2t)^2}{4} (H - 2t) = \frac{3,14(0,2 - 0,002)^2}{4} (0,1 - 0,002) = 0,003 \text{ м}^3.$$

Вес воздуха в поплавке

$$G_{\text{возд.}} = \rho_{\text{возд.}} \cdot g V_{\text{возд.}} = 1,293 \cdot 9,81 \cdot 0,003 = 0,038 \text{ Н.}$$

Вес поплавка

$$G_{\text{попл.}} = G_{\text{ст.}} + G_{\text{возд.}} = 9,64 + 0,038 = 9,678 \text{ Н.}$$

Условие плавания поплавка  $G_{\text{попл.}} = P_A$ .

Архимедова сила

$$P_A = \rho_{\text{в.}} g V_{\text{в.}} = \rho_{\text{в.}} g \frac{\pi d^2}{4} h = G_{\text{попл.}}$$

где  $\rho_{\text{в.}}$  – плотность воды;  $V_{\text{в.}}$  – объем воды, вытесненной поплавкой;  $h$  – глубина погружения поплавка.

Глубина погружения поплавка

$$h = \frac{4G_{\text{попл.}}}{\rho_{\text{в.}} g \pi d^2} = \frac{4 \cdot 9,678}{1000 \cdot 9,81 \cdot 3,14 \cdot 0,2^2} = 0,031 \text{ м} = 3,1 \text{ см.}$$

**Решить самостоятельно задачи:**

**Задача 1.3.12.** Как изменится сила гидростатического давления воды на плоский вертикальный затвор шириной 1,2 м, если его наклонить под углом  $60^\circ$  к горизонту? Глубина воды перед затвором остается постоянной и равной 1,5 м. Как изменится положение центра давления?

**Задача 1.3.13.** Определить силу избыточного давления воды на боковую наклонную стенку открытой емкости и найти положение центра давления. Ширина стенки  $b$ , угол наклона стенки к горизонту  $\alpha$  и глубина воды в емкости  $h$  заданы в таблице 1.3.1.

Таблица 3.1-Исходные данные к задаче 1.3.13

Вариант	b, м	$\alpha$ , град.	h, м
1	2,0	15	1,2
2	3,0	20	2,0
3	3,5	30	1,5
4	4,0	40	2,3
5	4,5	45	1,8

*Задача 1.3.14.* Определить выталкивающую силу, действующую на шарообразное тело диаметром 1,2 м, полностью погруженное в воду.

*Задача 1.3.15.* Определить на какую глубину погрузится в воду плавающий в ней сосновый брусок ( $\rho = 450 \text{ кг/м}^3$ ), если его высота 20 см.

## 1. 4 Основные понятия и определения гидродинамики

**Гидродинамика** изучает законы движения и взаимодействия жидкости с неподвижными и подвижными поверхностями [2,5, 7].

Движение жидкости существенно отличается от движения твердого тела. При движении жидкости расстояние между ее частицами не остается постоянным. Перемещение достаточно малого объема жидкости можно представить в виде суммы трех движений – поступательного, вращательного движения всего объема в целом, а также перемещения различных частиц объема относительно друг друга. В движущейся жидкости учитываются как массовые силы, так и силы трения (вязкость) [8, 11].

**Движущаяся жидкость** характеризуется двумя параметрами: скоростью течения  $v$  и гидродинамическим давлением  $p$ . Основной задачей гидродинамики является определение этих параметров при заданной системе внешних сил.

При движении жидкости скорость и давление могут изменяться в про-

странстве и во времени. В связи с этим различают два вида движения жидкости: установившееся и неуставившееся.

**Установившемся** называется движение, при котором скорость и давление в каждой точке пространства, занятого жидкостью, не изменяются во времени и является функцией только ее координат, т. е.

$$v = f_1(x, y, z); p = f_2(x, y, z).$$

При **неустановившемся** движении давление  $p$  и скорость  $v$  изменяются в каждой точке не только с изменением координат, но и во времени

$$v = f_1(x, y, z, \tau); p = f_2(x, y, z, \tau).$$

Под *жидкой частицей* в гидродинамике понимают условно выделенный очень малый объем жидкости, изменением формы которого можно пренебречь. Каждая частица жидкости при движении описывает кривую, которая называется траекторией движения.

Под **потоком** жидкости понимают движущуюся массу жидкости, полностью или частично ограниченную поверхностями. Поверхности раздела могут быть твердыми или образованными самой жидкостью на границе раздела фаз. Границами потоков служат стенки труб, каналов, открытая поверхность жидкости, а также поверхность обтекаемых потоком тел.

**Напорным** называется движение потока в закрытых руслах при полном заполнении поперечного сечения жидкостью. Например, напорное движение в трубах. Оно возникает за счет разности давлений в начале и конце трубопровода.

**Безнапорным** называется движение жидкости в открытых руслах, когда поток имеет свободную поверхность. В этом случае движение осуществляется только за счет сил тяжести, т. е. при наличии уклона (движение воды в каналах, реках, лотках и т. д.)

**Струи** представляют собой потоки жидкости, вытекающие через отверстия или сопла под действием напора. Струи могут быть ограничены со всех сторон газообразной или жидкой средой. В первом случае они называ-

ются свободными, во втором – затопленными.

**Линией тока** называют воображаемую кривую в движущемся потоке жидкости, для которой векторы скоростей каждой из частиц жидкости, находящихся на ней в данный момент времени, являются касательными к этой кривой (Рисунок 4.1).

Линия тока при установившемся движении совпадает с траекторией частиц.

Для неустановившегося движения линии тока не совпадают с траекторией.

Линия тока характеризует направление движения всех частиц, расположенных на ней в данный момент, а траектория представляет собой путь, пройденный одной частицей за какое-то время  $\tau$ .

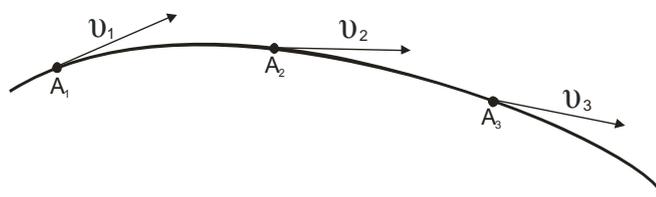


Рисунок 1.4.1. – Линия тока

Движение жидкости зависит от многих факторов, учесть которые очень трудно. Поэтому действительное движение заменяют упрощенной моделью. В основе гидродинамики лежит струйчатая модель движения, которая предполагает, что поток жидкости состоит из бесконечно большого числа элементарных струек [3, 5].

Если в потоке движущейся жидкости выделить элементарную площадку  $\delta F$ , ограниченную контуром  $K$ , и через все его точки провести линии тока, то образуется трубчатая поверхность, называемая *трубкой тока* (рис.1.4.2). Жидкость, движущаяся внутри трубки тока, называется *элементарной струйкой*.

Сечение, расположенное нормально к линиям тока, называется **живым**

сечением элементарной струйки.

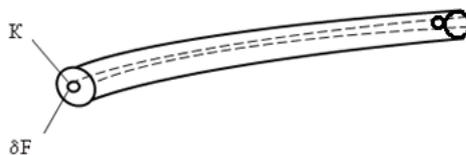


Рисунок 1.4.2-Трубка тока

где  $\delta F$  – Трубка тока;  $K$  – контур жидкости

Элементарная струйка при установившемся движении обладает следующими свойствами:

- 1) ее форма и ориентация в пространстве остаются неизменными во времени.
- 2) боковая поверхность струйки непроницаема для жидкости, т.е. ни одна частичка жидкости не может проникнуть внутрь или выйти наружу через боковые стенки трубки тока.
- 3) ввиду малости живого сечения струйки скорость и давление во всех точках этого сечения следует считать одинаковыми. Однако вдоль струек скорости  $v$  и давления  $p$  в общем случае могут изменяться.

*Живым сечением потока  $F$*  называется площадь сечения потока, перпендикулярная к направлению линий тока и ограниченная его внешним контуром. Площадь живого сечения потока (Рисунок 1.4.3) равна сумме площадей живых сечений элементарных струек.

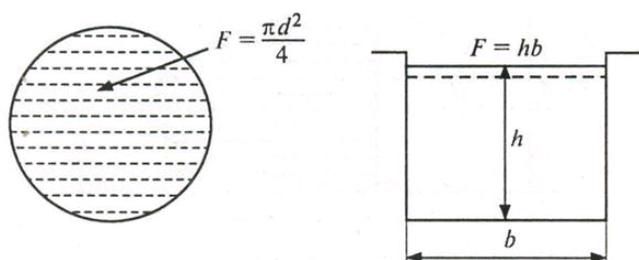


Рисунок 1.4.3. – Площадь живого сечения потока

**Смоченным периметром потока  $\Pi$**  называется длина контура живого сечения, по которой жидкость соприкасается с ограничивающими ее стенками. При напорном движении жидкости смоченный периметр  $\Pi$  совпадает с геометрическим периметром, при безнапорном не совпадает.

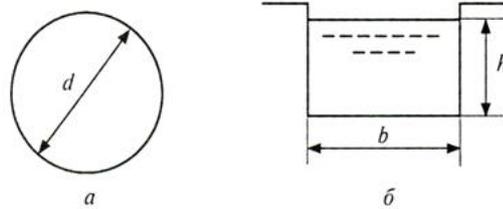


Рисунок 1.4.4. – Смоченный периметр

где  $a$  – круглой трубы,  $\Pi = \Pi_r = \pi d$ ;

$b$  – прямоугольного лотка  $\Pi = b + 2h$ ,

$$\Pi_2 = 2b + 2h$$

*Гидравлическим радиусом  $R_z$*  называется отношение площади живого сечения к смоченному периметру

$$R_r = F / \Pi \quad (1.4.1)$$

Геометрический радиус и гидравлический радиус – совершенно разные понятия, даже в случае напорного движения жидкости в круглой трубе. Например, для трубы диаметром  $d$  геометрический радиус  $r = d/2$ , а гидравлический

$$R_r = \pi d^2 / 4\pi d = d/4 = r/2 \neq r.$$

При гидравлических расчетах часто используется понятие *эквивалентного диаметра*:

$$d_{\text{э.кв.}} = 4R_r = 4F / \Pi \quad (1.4.2)$$

Для круглых напорных труб диаметром  $d$

$$d_{\text{э.кв.}} = 4R_r = d..$$

Для труб прямоугольного сечения;

$$d_{\text{экв.}} = 4R_r = 4bh/(b+2h).$$

**Расходом** называется количество жидкости, протекающей через живое сечение потока в единицу времени. Различают объемный  $V$ , массовый  $M$  и весовой  $G$  расходы жидкости. Между ними существует связь

$$V = M/\rho = G/\rho g \quad (1.4.3)$$

Для элементарной струйки элементарный расход определяется по формуле

$$dV = v dF, \quad (4.4)$$

где  $dF$  площадь живого сечения элементарной струйки.

Объемный расход потока равен сумме элементарных расходов струек.

Скорость жидкости в различных точках живого сечения потока различна и точный закон изменения скорости по сечению не всегда известен, поэтому для упрощения расчетов вводят понятие средней скорости для данного живого сечения  $v_{\text{ср}}$  (Рисунок 1.4.5), тогда

$$V = v_{\text{ср}} F. \quad (1.4.5)$$

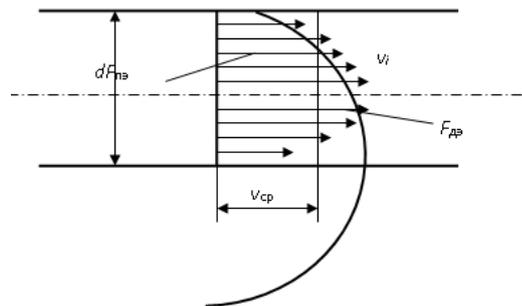


Рисунок 1.4.5. – К понятию «средняя скорость»

где  $F_{\text{н.э.}}$  – площадь прямоугольной эпюры скоростей (средних);

$F_{\text{д.э.}}$  – площадь действительной (криволинейной) эпюры.

**Средняя скорость** – фиктивная скорость потока, которая считается одинаковой для всех частиц данного сечения, и подобрана так, что расход, определенный по ее значению, равен истинному значению расхода

Установившееся движение характеризуется постоянством расхода во

времени. Различают **равномерное и неравномерное** установившееся движение.

**Равномерным** установившемся движением называется такое движение жидкости, при котором средняя скорость и площади живых сечений потока не изменяются по его длине (например, установившееся движение в цилиндрической трубе, движение в канале призматической формы) (Рисунок 4.6).

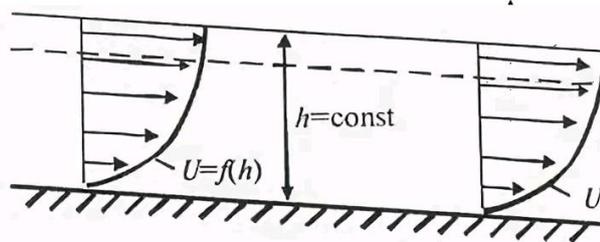
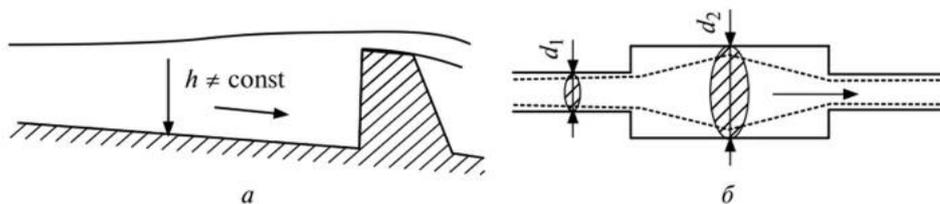


Рисунок 1.4.6. – Равномерное движение в канале призматической формы

**Неравномерным** установившемся движением называется такое движение, при котором средняя скорость и площади живых сечений изменяются по длине (например, движение в трубе переменного сечения, движение в открытых руслах при наличии перегораживающих сооружений) (Рисунок 1.4.7).



*a*

*б*

Рисунок – 1.4.7. Примеры возникновения неравномерного движения: где *a* – перед подпорным сооружением; *б* – при внезапном сужении

## Контрольные вопросы

1. Дайте понятие установившегося и неустановившегося движения жидкости.
2. Какое движение жидкости называется напорным, какое безнапорным?
3. Чем линия тока отличается от траектории движения жидкой частицы? Может ли линия тока совпасть с траекторией движения частицы жидкости?
4. Что такое элементарная струйка? Какими свойствами она обладает?
5. Что понимается под потоком жидкости.
6. Дайте понятия живого сечения, смоченного периметра и гидравлического радиуса потока.
7. Поясните разницу между гидравлическим и геометрическим радиусом напорной трубы.
8. Что такое расход потока?
9. Поясните понятие «средняя скорость течения потока».
10. В чем состоит различие между равномерным и неравномерным установившемся движением потока.

## Материалы практических занятий

*Задача 1.4.1.* Определить гидравлические параметры сечения канала трапецеидального профиля, если ширина канала по дну  $b = 2,5$  м, коэффициент заложения боковых откосов канала  $m = ctg\alpha = 2$  ( $\alpha$  – угол бокового откоса с горизонталью), глубина воды в канале  $h = 1,2$  м.

*Решение.*

Определяем площадь живого сечения потока в трапецеидальном канале

$$F = \left( \frac{B + b}{2} \right) h,$$

где  $B$  – ширина потока в канале по урезу воды

$$B = b + 2hctg\alpha = b + 2mh.$$

Подставляя значение  $V$  в исходную формулу, получим

$$F = \left( \frac{b + 2mh + b}{2} \right) h = (b + mh)h = (2,5 + 2 \cdot 1,2)1,2 = 5,88 \text{ м}^2.$$

Определяем длину смоченного периметра канала

$$\Pi = b + 2l,$$

где  $l$  – длина бокового откоса канала

$$l = \sqrt{h^2 + (mh)^2} = h\sqrt{1 + m^2}.$$

Тогда

$$\Pi = b + 2h\sqrt{1 + m^2} = 2,5 + 2 \cdot 1,2\sqrt{1 + 2^2} = 7,87 \text{ м}.$$

Определяем гидравлический радиус канала

$$R = \frac{F}{\Pi} = \frac{5,88}{7,87} = 0,75 \text{ м}.$$

*Задача 1.4.2.* Какая глубина воды установится в канале трапециевидального поперечного сечения шириной по дну  $b = 3,0$  м и заложением откосов  $m = 1,25$ , если в нем движется поток воды с расходом  $V = 680$  л/с и средней скоростью  $v = 80$  см/с.

*Решение.*

Определяем площадь живого сечения потока в канале

$$F = \frac{V}{v} = \frac{0,68}{0,8} = 0,85 \text{ м}^2.$$

Глубину воды определим из формулы площади трапециевидального сечения канала

$$F = (b + mh)h.$$

Преобразуем уравнение к виду

$$mh^2 + bh - F = 0.$$

Решаем квадратное уравнение относительно  $h$

$$h = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mF}}{2m},$$

так как глубина отрицательной быть не может определяем только положительный корень уравнения

$$h = \frac{-3 + \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1,25 \cdot (-0,85)}}{2 \cdot 1,25} = 0,256 \text{ м.}$$

**Решить самостоятельно задачи:**

*Задача 1.4.3.* Определить площадь живого сечения, смоченный периметр и гидравлический радиус потока, движущегося в открытом канале треугольного поперечного сечения, если ширина воды по урезу  $b = 2,2$  м, максимальная глубина воды в канале  $h = 1,5$  м.

*Задача 1.4.4.* Определить среднюю скорость течения воды в трапециевидальном русле при ширине по дну  $b = 1,2$  м, заложении откосов  $m = 1,5$ , если при расходе воды в канале  $V = 1,8 \text{ м}^3/\text{с}$ , в нем установилась средняя скорость течения  $v = 0,52$  м/с.

*Задача 1.4.5.* Определить величину расхода нефти в круглой напорной трубе диаметром  $d = 0,5$  м, если средняя скорость течения в трубе  $v = 0,35$  м/с.

*Задача 1.4.6.* Какова должна быть ширина прямоугольного канала, чтобы при максимальном расходе  $V = 3,8 \text{ м}^3/\text{с}$ , глубина воды в нем не превышала  $2,0$  м, а средняя скорость была не выше  $1,2$  м/с.

*Задача 1.4.7.* Определить максимальную глубину воды в канале треугольного профиля, если ширина воды по урезу  $1,2$  м, расход воды  $0,35 \text{ м}^3/\text{с}$ , средняя скорость течения  $v = 0,6$  м/с.

*Задача 1.4.8.* Определить длину смоченного периметра и гидравлический радиус трапециевидального канала шириной  $b = 2,5$  м, с заложением откосов  $m = 1,5$  если при расходе  $V = 400$  л/с средняя скорость течения  $v = 0,8$  м/с.

*Задача 1.4.9.* Чему будет равен расход теплоносителя в кольцевом зазоре теплообменника типа «труба в трубе», если внутренний диаметр внеш-

ней трубы 100 мм, внутренней трубы – 60 мм, скорость течения теплоносителя в зазоре – 30 см/с.

*Задача 1.4.10.* Каким должен быть диаметр трубопровода, чтобы при пропуске расходы 65 л/с, скорость течения не превышала 0,5 м/с?

## 1.5 Основные уравнения гидродинамики

### 1.5.1. Уравнение неразрывности потока

Рассмотрим установившееся движение потока жидкости, ограниченное с боков линиями тока. Двумя произвольными сечениями 1–1 и 2–2, нормальными к линиям тока выделим некоторый отсек потока (Рисунок 1.5.1).

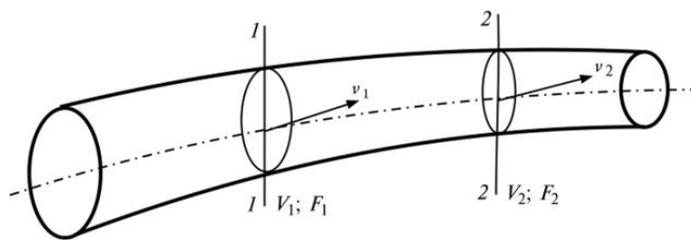


Рисунок 1.5.1. – К выводу уравнения неразрывности потока

За время  $d\tau$  через живое сечение 1–1 внутрь отсека поступает объем жидкости  $V_1 d\tau$ , а через живое сечение 2–2 за то же время из него выходит объем жидкости  $V_2 d\tau$ . Учитывая, что проникновение жидкости через боковые поверхности, образованные линиями тока, невозможно, что жидкость несжимаема и соблюдается условие сплошности (т. е. невозможно образование пустот, не заполненных жидкостью), можно утверждать, что объемы жидкости на входе и выходе равны между собой  $V_1 d\tau = V_2 d\tau$ . Поскольку 1–1 и 2–2 взяты произвольно, то можно написать:

$$V_1 = V_2 = V_3 = \dots V_n = \text{const}$$

или

$$V = \text{const} \text{ (вдоль потока)}. \quad (1.5.1)$$

Уравнение (5.1) называют уравнением постоянства расхода или **уравнением неразрывности потока**. Его можно записать в следующем виде

$$Fv_{\text{ср.}} = \text{const} \text{ (вдоль потока)} \quad (1.5.2)$$

Уравнение (1.5.2) – первое основное уравнение гидродинамики. Оно читается так: «При установившемся движении несжимаемой жидкости произведение площади живого сечения  $F$  на среднюю скорость  $v_{\text{ср}}$  есть величина постоянная». Иначе

$$F_1 v_{\text{ср.1}} = F_2 v_{\text{ср.2}} \quad (1.5.3)$$

или

$$v_{\text{ср.1}}/v_{\text{ср.2}} = F_2/F_1. \quad (1.5.4)$$

Т. е. средние скорости обратно пропорциональны площадям соответствующих живых сечений потока.

Уравнение неразрывности выражает материальный баланс потока (закон сохранения вещества).

### 1.5.2. Уравнение Бернулли

Жидкость независимо от того, находится ли она в состоянии покоя или движения, обладает некоторым запасом энергии, равным сумме внутренней, потенциальной и кинетической энергий.

**Внутренняя энергия жидкости  $U$**  представляет собой энергию молекул жидкости, всегда совершающих поступательное и вращательное движения и потому обладающих энергией этих движений.

Скорость молекул, а, следовательно, их внутренняя энергия  $U$  увеличивается с повышением температуры. К внутренней энергии относятся также: потенциальная энергия молекул, зависящая от сил притяжения между ними;

энергия внутримолекулярных колебаний, которая определяется колебательным движением атомов, входящих в состав молекулы. Внутренняя энергия  $U$  измеряется в Джоулях (Дж) (Рисунок 1.5.2.).

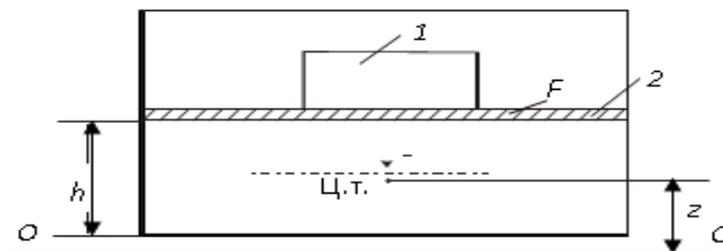


Рисунок 1.5.2. – К определению потенциальной энергии жидкости

где 1 – груз; 2– поршень

*Потенциальная энергия жидкости* состоит из потенциальной энергии давления и потенциальной энергии положения жидкости. Выражение для потенциальной энергии давления можно получить, определив давление поршня на некоторый объем жидкости в сосуде (Рисунок 1.5.2).

Если поршень находится под действием груза  $P$ , то жидкость находится под давлением

$$p = \frac{P}{F},$$

где  $F$  – площадь поршня.

Потенциальная энергия давления  $\Pi_p$  в данном случае равна потенциальной энергии груза  $Ph$ . Заменяя  $P$  на  $pF$  и учитывая, что  $Fh = W$  (объем жидкости), получаем, что потенциальная энергия давления  $\Pi_p$  равна

$$\Pi_p = Ph = pFh = pW \quad (1.5.5)$$

Потенциальная энергия положения  $\Pi_{\text{пол}}$  определяется высотой  $z$  центра тяжести (ЦТ) объема жидкости над некоторой произвольно выбранной горизонтальной плоскостью  $O-O$ , называемой *плоскостью сравнения*. Потенциальная энергия положения –

$$\Pi_{пол} = G_{жс} z = mgz. \quad (1.5.6)$$

где  $G_{жс}$  – вес жидкости в объеме  $V$ .

*Кинетическая энергия жидкости*  $T$ , движущейся со скоростью  $v$ , определяется по следующей формуле

$$T = mv^2/2. \quad (1.5.7)$$

В итоге, полная энергия  $E$  жидкости равна  $U + \Pi_p + \Pi_{пол} + T$ :

$$E = U + pV + mgz + mv^2/2. \quad (1.5.8)$$

Сумма внутренней энергии и потенциальной энергии давления называется *энтальпией* (теплосодержанием):

$$I = U + pV. \quad (1.5.9)$$

Тогда полная энергия жидкости, Дж,

$$E = I + mgz + mv^2/2. \quad (1.5.10)$$

Разделив все члены выражения (5.10) на  $m$ , получим удельную энергию жидкости, т. е. энергию 1 кг жидкости:

$$E_{уд.} = u + pw_{уд.} + gz + v^2/2, \text{ Дж/кг} \quad (1.5.11)$$

или

$$E_{уд.} = i + gz + v^2/2$$

где  $u$  – внутренняя энергия 1 кг жидкости, Дж/кг;  $w_{уд.}$  – объем занимаемый 1 кг жидкости (удельный объем), м<sup>3</sup>/кг;  $i$  – удельная энтальпия, т. е. энтальпия 1 кг жидкости, Дж/кг.

При движении жидкости по трубопроводу без дополнительного подвода энергии (источника работы или теплоты  $Q$ ) или ее отвода, удельная энергия жидкости по закону сохранения энергии не изменяется. При перемещении жидкости от некоторого сечения 1–1 до сечения 2–2 (Рисунок 1.5.3) удельные энергии жидкости в этих сечениях будут одинаковы

$$u_1 + p_1 w_{1уд.} + gz_1 + \frac{v_1^2}{2} = u_2 + p_2 w_{2уд.} + gz_2 + \frac{v_2^2}{2} \quad (1.5.12)$$

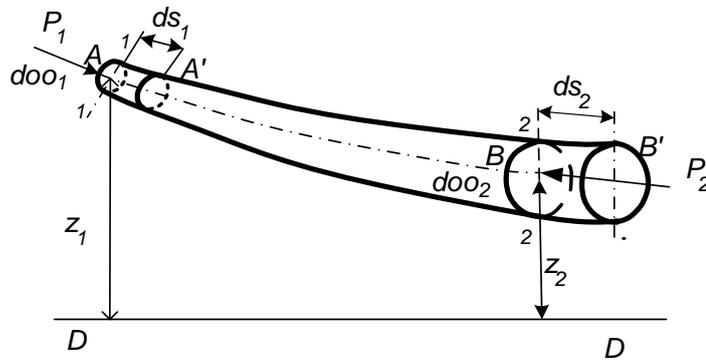


Рисунок 5.3. – К выводу уравнения Бернулли

Учитывая, что  $w_{уд} = 1/\rho$ , (где  $\rho$  – плотность жидкости;  $w_{уд}$  – удельный объем жидкости), получим

$$u_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + gz_1 + \frac{v_1^2}{2} = u_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + gz_2 + \frac{v_2^2}{2}. \quad (1.5.13)$$

Формула (5.13) пригодна для любой жидкости, включая газы и капельные жидкости.

Для любой капельной жидкости (идеальной и реальной)  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ . Идеальная жидкость движется без трения, поэтому (при отсутствии подвода теплоты) ее температура и внутренняя энергия  $u$  не будут изменяться, следовательно, в данном случае  $u_1 = u_2 = u$ . Тогда уравнение энергетического баланса (5.13) примет следующий вид:

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2}$$

или

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} \quad (1.5.14)$$

Уравнение (5.14) выражает энергетический баланс движущейся идеальной жидкости и называется *уравнением Бернулли*. В уравнении (1.5.14) первый член  $z$  выражает удельную потенциальную энергию положения жидкости, имеет размерность длины и называется *геометрическим напором*.

Второй член  $p/\rho g$  выражает удельную потенциальную энергию давления жидкости и также имеет размерность длины

$$\left[ \frac{p}{\rho g} \right] = \left[ \frac{\text{Н/м}^2}{\text{кг/м}^3 \cdot \text{м/с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м/с}^2 \cdot 1/\text{м}^2}{\text{кг/м}^3 \cdot \text{м/с}^2} = \frac{\text{м}^3}{\text{м}^2} = \text{м} \right]$$

Энергия давления может быть измерена при помощи вертикальной пьезометрической трубки. Под действием давления жидкость поднимается в трубке на высоту  $h = p/\rho g$ , которая называется **пьезометрическим (или статическим) напором**. Третий член уравнения  $v^2/2g$  выражает удельную кинетическую энергию движущейся жидкости. Этот член называется скоростным или динамическим напором и также имеет размерность длины

$$[v^2/2g] = \frac{\text{м}^2/\text{с}^2}{\text{м/с}^2} = \text{м}$$

Скоростной напор равен высоте, на которую может подняться, струя жидкости, вытекающей вертикально вверх с начальной скоростью  $v$ .

Таким образом, согласно уравнению Бернулли, при движении идеальной жидкости сумма геометрического, пьезометрического и скоростного напоров во всех сечениях потока является постоянной величиной.

Рассмотрим уравнение Бернулли для реальной (вязкой) жидкости (см. Рисунок 1.5.3). Реальная жидкость движется с трением. В этом случае при переходе жидкости от сечения 1–1 к сечению 2–2 часть удельной энергии будет расходоваться на преодоление трения и других сопротивлений. Потерянная при этом энергия превращается в теплоту, вследствие чего увеличивается внутренняя энергия жидкости (при отсутствии теплообмена с окружающей средой).

Из уравнений (1.5.12) и (1.5.13) получим (при  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ )

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{u_2 - u_1}{g}, \quad (1.5.15)$$

где  $(u_2 - u_1)/g = h_{\text{п}}$  – потерянный напор, имеющий размерность длины.

Или

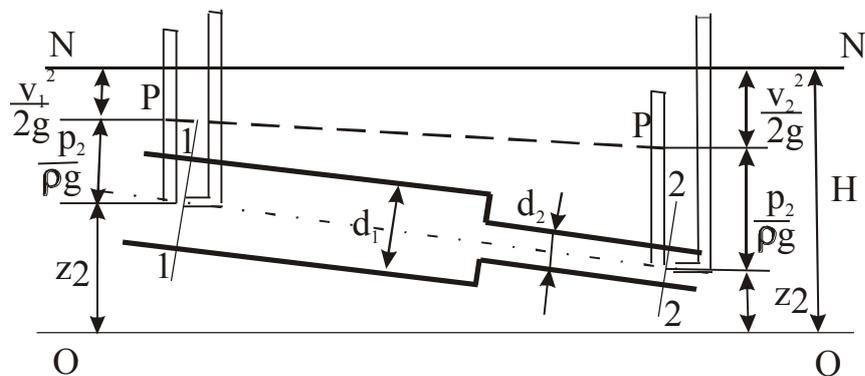
$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + h_{\text{п}}. \quad (1.5.16)$$

Для реальной жидкости уравнение Бернулли читается так: «При установившемся движении реальной жидкости сумма геометрического, пьезометрического, скоростного и потеряннного напоров в каждой точке любого сечения потока является постоянной величиной».

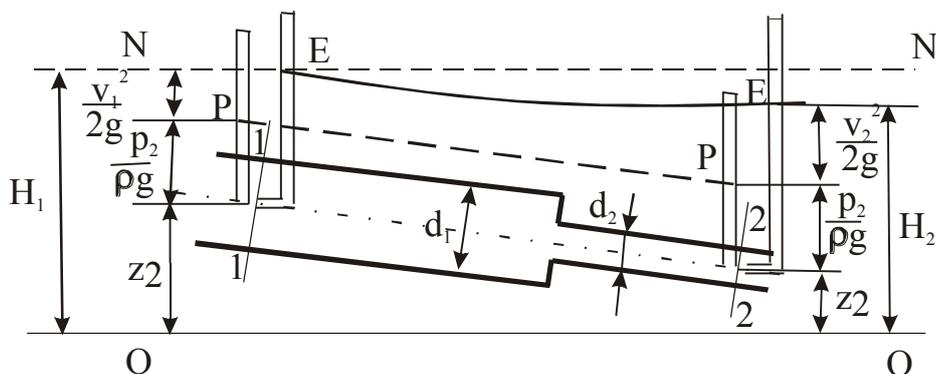
Все напоры имеют размерность длины, поэтому уравнение Бернулли для наглядности можно представить графически. При графическом представлении все напоры изображаются вертикальными отрезками, а их сумма – вертикалью, проведенной из произвольно выбранной плоскости сравнения  $O-O$  (нулевой уровень) до общей горизонтальной плоскости  $N-N$  (для идеальной жидкости) (Рисунок 5.4, а). Если в рассматриваемых сечениях поместить открытые изогнутые стеклянные трубки, один конец которых направлен по оси потока навстречу течению (трубки Пито), то высота подъема жидкости в трубках будет соответствовать сумме пьезометрического и скоростного напоров.

Для реальной жидкости отрезок  $h_w$  будет характеризовать величину потеряннного напора при ее движении от сечения  $1-1$  до сечения  $2-2$  (см. Рисунок 5.4, б).

Сумма геометрического, пьезометрического и скоростного напоров называется *гидродинамическим напором*. Если соединить уровни жидкости в трубках Пито, то получим нисходящую кривую  $E-E$  (для реальной жидкости), которая называется линией гидродинамического напора или линией падения напора (напорная линия, линия удельной энергии) (см. Рисунок 1.5.4, б).



*a*



*б*

Рисунок 1.5.4. – Графическое изображение уравнения Бернулли:

*a* – для идеальной жидкости; *б* – для реальной жидкости

На Рисунок 1.5.4 видно, что гидродинамический напор реальной жидкости уменьшается в направлении ее движения на величину напора, потерянного между начальным и конечным сечениями потока. Падение соответствующего напора на единицу длины называется соответственно *гидравлическим* или *пъезометрическим* уклоном [5, 7, 8].

Используя уравнение Бернулли можно определить скорость и расход жидкости, т. е. пропускную способность аппаратов и трубопроводов, а также время истечения жидкости и ее полный напор.

Уравнение Бернулли находит самое широкое применение в технике. Работа ряда устройств и приборов основана на использовании этого важнейшего закона гидравлики. На основании уравнения Бернулли создан ряд приборов: водомер Вентури, водоструйный насос, эжектор, карбюратор и т. д.

Существуют и другие приборы, работающие по принципу создания искусственного перепада давления и на основе закона Бернулли, например, диафрагма (водомерная шайба) и сопло [7, 8, 15].

Пользуясь уравнением Бернулли определяют скорость и расход жидкости, т. е. пропускную способность аппаратов и трубопроводов. При помощи этого уравнения можно рассчитать также время истечения жидкости и ее полный напор.

Условия применения уравнения Бернулли:

1. Уравнение Бернулли составляют для двух живых, т.е. нормальных к направлению скорости, сечений потока относительно произвольной горизонтальной плоскости сравнения. При этом живые сечения должны располагаться на прямолинейных участках потока. Нумеровать расчетные сечения следует так, чтобы жидкость двигалась от сечения 1 – 1 к сечению 2 – 2.

2. Одно из сечений рекомендуется брать там, где известны либо  $p$ , либо  $v$ , либо  $z$ , а другое там, где требуется определить значение одной из этих величин.

3. Горизонтальную плоскость сравнения удобнее выбирать так, чтобы исключить одно из  $z$ .

4. Следует учитывать все потери напора на трение на рассматриваемом участке потока 1 – 2.

### **Контрольные вопросы**

1. Выражением какого закона является уравнение неразрывности потока?

2. Объясните энергетический смысл уравнения Бернулли.

3. Дайте геометрическую интерпретацию уравнения Бернулли.

4. Приведите уравнение Бернулли для потока реальной жидкости.

5. Что такое гидродинамический напор?

6. Что понимают под гидравлическим уклоном?
7. Чем вызываются потери напора в реальной жидкости?
8. Что такое пьезометрический уклон?
9. Может ли происходить увеличение полной удельной энергии при движении потока реальной жидкости? Могут ли увеличиваться удельная потенциальная и удельная кинетическая энергии потока реальной жидкости?
10. Какие устройства и приборы работают на основе закона Бернулли?

### Материалы практических занятий

*Задача 1.5.1.* Жидкость движется по трубопроводу, состоящему из двух участков труб разного диаметра. На первом участке трубы диаметром 100 мм, скорость течения 50 см/с, на втором участке скорость течения 20 см/с. Каков диаметр трубы на втором участке?

*Решение.*

Согласно уравнению неразрывности

$$F_1 v_1 = F_2 v_2$$

Откуда выразим площадь сечения трубы на 2-м участке

$$F_2 = \frac{F_1 v_1}{v_2}$$

Площадь сечения трубы на 1-м участке

$$F_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,1^2}{4} = 0,00785 \text{ м}^2.$$

Тогда площадь сечения 2-й трубы будет

$$F_2 = \frac{0,00785 \cdot 0,5}{0,2} = 0,0196 \text{ м}^2.$$

Выражаем диаметр второй трубы из формулы площади круглого сечения

$$F_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} \rightarrow d_2 = \sqrt{\frac{4F_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,0196}{3,14}} = 0,16 \text{ м.}$$

*Задача 1.5.2.* Определить расход молока, протекающего по трубопроводу диаметром 50 мм со скоростью 40 см/с.

*Решение.*

Расход молока, согласно уравнению неразрывности равен

$$V = Fv = \frac{\pi d^2}{4} v = \frac{3,14 \cdot 0,05^2}{4} \cdot 0,4 = 0,000785 \text{ м}^3/\text{с} \approx 0,8 \text{ л/с.}$$

*Задача 1.5.3.* По трубопроводу, состоящему из двух участков труб диаметром 150 мм и 250 мм, протекает жидкость с расходом 20 л/с. Определить скорости течения жидкости на участках трубопровода.

*Решение.*

Скорость течения на первом участке

$$v_1 = \frac{V}{F_1} = \frac{4V}{\pi d_1^2} = \frac{4 \cdot 0,02}{3,14 \cdot 0,15^2} = 1,13 \text{ м/с.}$$

Скорость течения на втором участке

$$v_2 = \frac{V}{F_2} = \frac{4V}{\pi d_2^2} = \frac{4 \cdot 0,02}{3,14 \cdot 0,25^2} = 0,41 \text{ м/с.}$$

*Задача 1.5.4.* Пренебрегая потерями напора, определить расход воды с помощью водомера Вентури при следующих данных: разность показаний пьезометров  $h = 25$  см, диаметр трубопровода  $d_1 = 200$  мм, диаметр горловины водомера  $d_2 = 100$  мм. (Рисунок 1.5.5)

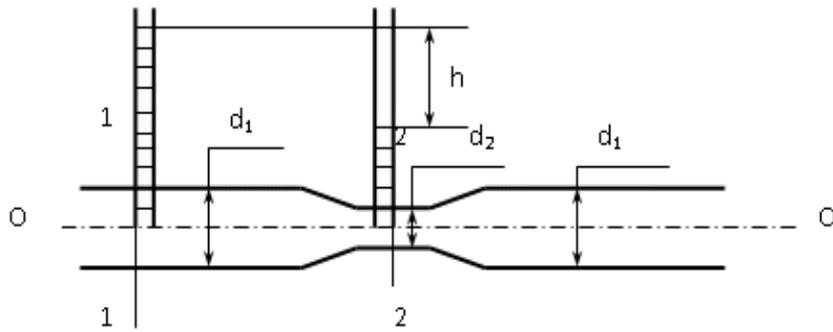


Рисунок 1. 5.5. – Схема к задаче 1.5.4

*Решение.*

Составляем уравнение Бернулли для двух живых сечений 1 - 1 и 2 - 2 относительно произвольной горизонтальной плоскости сравнения 0 - 0 (проведена по оси трубопровода)

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{\text{п.}}$$

В соответствии с условием задачи  $h_{\text{п.}} = 0$ . Т.к. плоскость сравнения проходит по оси трубы  $z_1 = z_2 = 0$ , тогда

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}$$

или

$$h = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}.$$

В данном уравнении две неизвестные величины  $v_1$  и  $v_2$ . Для исключения одной из них применяем уравнение неразрывности, из которого следует

$$v_1 F_1 = v_2 F_2 \rightarrow v_1 = \frac{v_2 F_2}{F_1} = \frac{v_2 d_2^2}{d_1^2}$$

Тогда

$$h = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^4 = \frac{v_2^2}{2g} \left[ 1 - \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^4 \right].$$

Определяем среднюю скорость в сечении 2 - 2:

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4}} \sqrt{2gh}.$$

В соответствии с уравнением неразрывности величина расхода

$$V = v_2 F_2 = \frac{\pi d_2^2}{4 \sqrt{1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4}} \sqrt{2gh} = A \sqrt{h},$$

где  $A = \frac{\pi d_2^2}{4 \sqrt{1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4}}$  – постоянная водомера.

Вычисляем расход

$$V = \frac{3,14 \cdot 0,1^2}{4 \sqrt{1 - \left(\frac{0,1}{0,2}\right)^4}} \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,25} = 0,018 \frac{\text{м}^3}{\text{с}} = 18 \text{ л/с}.$$

**Решить самостоятельно задачи:**

**Задача 1.5.5.** К баку постоянного напора присоединен короткий трубопровод. Напор на входе в трубопровод составляет 3 м, давление на свободной поверхности жидкости в баке – атмосферное. Пренебрегая потерями напора в трубопроводе определить скорость истечения жидкости на его выходе.

**Задача 1.5.6.** Определить высоту  $h$ , на которую поднимется вода из сосуда по трубке, присоединенной к горловине водомера Вентури, если диаметр трубопровода  $d_1 = 125$  мм, диаметр горловины  $d_2 = 75$  мм, расход  $V = 15$  л/с, избыточное давление в сечении перед горловиной  $p_1 = 3050$  Па. При расчете потерями напора пренебречь.

**Задача 1.5.7.** Пренебрегая потерями напора, определить диаметр горловины водомера Вентури  $d_2$ , чтобы при пропуске по трубопроводу расходы  $V = 10$  л/с, вода по трубке подсасывалась на высоту  $h = 60$  см. Диаметр трубопровода  $d_1 = 100$  мм, избыточное давление в сечении трубопровода перед

горловиной  $p_1 = 6500$  Па.

*Задача 1.5.8.* Пренебрегая потерями напора определить разность уровней в пьезометрах водомера Вентури, если  $d_1 = 150$  мм,  $d_2 = 50$  мм, расход  $V = 20$  л/с.

*Задача 1.5.9.* Построить кривую зависимости  $V = f(h)$  для водомера Вентури при следующих данных  $d_1 = 0,3$  м,  $d_2 = 0,1$  м, разность уровней в пьезометрических трубках водомера  $h_1 = 0,2$  м;  $h_2 = 0,3$  м;  $h_3 = 0,45$  м;  $h_4 = 0,55$  м.

*Задача 1.5.10.* Пренебрегая потерями напора, определить расход воды, который можно пропускать по трубопроводу, чтобы вакуум в суженной части был равен 29430 Па. Диаметр трубопровода  $d_1 = 200$  мм, диаметр суженной части  $d_2 = 100$  мм, манометрическое давление в сечении перед суженной частью  $p_1 = 79240$  Па.

## **1. 6 Режимы движения вязкой жидкости и гидравлические сопротивления**

Еще в 1839 г. Г. Хагеном и в 1880 г. Д. И. Менделеевым в результате экспериментальных исследований движущихся жидкостей было установлено, что существует два режима движения жидкости [7, 8]. Наиболее полные лабораторные исследования режимов движения жидкости и их влияния на потери напора провел английский физик О. Рейнольдс в 1883 г. Установка Рейнольдса для исследования режимов движения жидкости показана на Рисунок 2.9. К баку 1, заполненному исследуемой жидкостью, присоединена горизонтальная стеклянная труба 7 с вентилем 8, предназначенным для регулирования скорости течения жидкости. Над баком установлен сосуд 4 с раствором краски. От сосуда отходит тонкая стеклянная трубка 6 с регулирующим вентилем 5. Конец тонкой трубки входит в стеклянную трубку 7. Для пополнения бака жидкостью служит труба 2 с регулирующим вентилем

3. Таким образом, уровень в баке может либо изменяться, либо поддерживаться постоянным.

Опыты проводились следующим образом. Емкости заполнялись исследуемой и окрашенной жидкостью. Затем постепенно открывались вентили 8, 5, 3; при этом устанавливались необходимые (вначале замедленные) скорости движения жидкости. Зная объем мерного сосуда и время его заполнения, можно определить расход жидкости.

Зная скорость движения жидкости в стеклянной трубке 7, диаметр трубы и род самой жидкости Рейнольдс установил следующее.

При небольших скоростях течения в трубке 7 окрашенная жидкость движется в виде отчетливо выраженной тонкой струйки, не смешиваясь с потоком неокрашенной воды (Рисунок 6.1). Если присоединить к этой трубке пьезометр или трубку Пито, то они покажут давления и скорости, постоянные во времени, и отсутствие колебаний (пульсаций), т. е. слоистый характер жидкости.

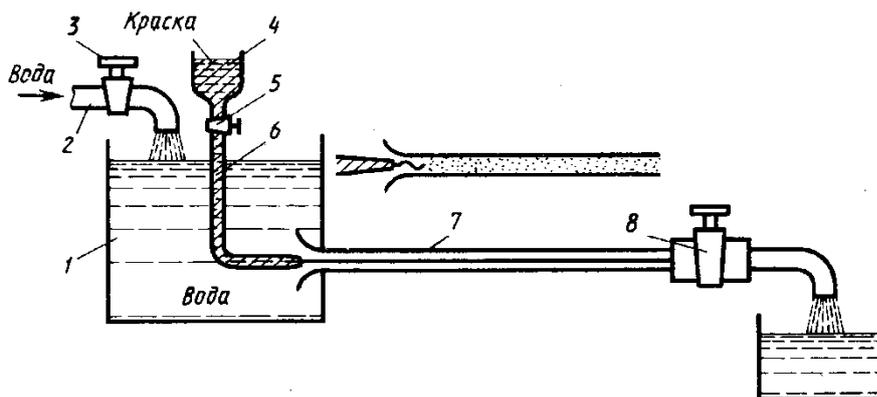


Рисунок 1.6.1. – Схема установки Рейнольдса для исследования режимов движения жидкости:

где 1 – бак с жидкостью; 2 – труба; 3, 5, 8 – вентили; 4 – сосуд с краской;  
6, 7 – стеклянные трубки

При увеличении скорости потока жидкости в трубке 7 окрашенная струйка начинает совершать волнообразное движение, затем на отдельных

ее участках появляются разрывы, и при каком-то определенном значении скорости струйка полностью разрывается, размываясь исследуемой жидкостью. Красящая жидкость расходится по всему объему трубы, равномерно окрашивая всю массу жидкости. Если в это время подмешать в исследуемый поток мелкие частицы какого-либо твердого вещества с плотностью, равной плотности самой жидкости, то эти частицы «описут» сложные криволинейные траектории, выполняемые элементарными струйками. Таким образом, слоистый характер движения жидкости переходит в вихреобразное, вращательное движение. При этом пьезометр или трубка Пито покажут непрерывные пульсации давления и скоростей в потоке жидкости. Если постепенно прикрывать кран 8 и уменьшать скорость движения жидкости в трубке 7, первоначальный характер течения восстановится.

Режим движения жидкости, наблюдаемый при малых скоростях, при котором отдельные струйки жидкости движутся параллельно друг другу и оси потока, называется **ламинарным** (Рисунок 1.6.2) (от лат. *lamina* - лента, полоска), т. е. ленточным, слоистым. Он наблюдается в тонких капиллярных трубках, в кровеносных сосудах, а также при движении по трубам очень вязких жидкостей: нефти, мазута, смазочных масел и т. п.

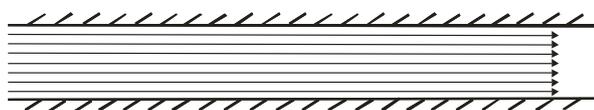


Рисунок 1.6.2. – Ламинарный режим движения жидкости

Режим движения жидкости, наблюдаемый при больших скоростях, отличается неупорядоченным движением элементов жидкости и называется **турбулентный** (от лат. *turbulentus* – беспорядочный). Несмотря на свою сложность, турбулентный режим движения имеет определенные закономерности (Рисунок 6.3). В жидкости наблюдаются отдельные слои с ламинарным режимом, с переходным режимом и турбулентный поток. Турбулент-

ный режим встречается довольно часто в природе и в искусственных сооружениях: при движении воды в реках, каналах, трубах и т. д.

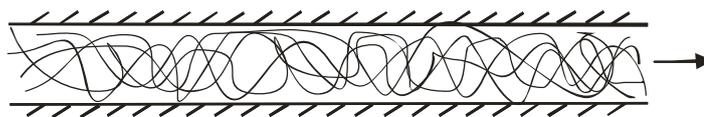


Рисунок 1.6.3. – Турбулентный режим движения жидкости

Обобщив результаты опытов, проведенных с трубами круглого сечения, Рейнольдс пришел к выводу, что основными факторами, определяющими характер режима движения, являются средняя скорость жидкости  $v$ , диаметр трубопровода  $d$ , плотность жидкости  $\rho$  и ее вязкость  $\mu$ . При этом была установлена следующая зависимость: чем больше размеры поперечного сечения потока и плотность жидкости и чем меньше ее вязкость, тем быстрее при увеличении скорости движения жидкость переходит от ламинарного режима к турбулентному.

Скорость, при которой происходит смена режимов движения жидкости, называется **критической скоростью**.

На основании экспериментальных данных Рейнольдс установил, что значения критических скоростей, соответствующих точкам перехода ламинарного режима в турбулентный, непостоянны. Поэтому для характеристики режима движения жидкости был введен более объективный показатель – безразмерный параметр, названный **критерием или числом Рейнольдса ( $Re$ )**:

$$Re = \frac{vd\rho}{\mu} = \frac{vd}{\nu}, \quad (1.6.1)$$

где  $\nu = \mu/\rho$  – кинематический коэффициент вязкости.

Выполненными исследованиями было установлено, что минимальное значение числа Рейнольдса, соответствующее переходу ламинарного режима в турбулентный, равно 2320. Это число было названо

критическим числом Рейнольдса:

$$Re_{кр} = 2320$$

Число  $Re = 2320$  не следует рассматривать как строго регламентированное. Оно может меняться в довольно широких пределах и зависит не только от входящих в формулу величин, но и еще от ряда внешних факторов: шероховатости труб, сотрясения трубопровода, резкого изменения скорости и др. Если устранить влияние этих факторов, то можно задержать переход ламинарного режима в турбулентный и довести значение  $Re_{кр}$  до 11000–13000.

Из сравнения верхнего и нижнего значений критического числа Рейнольдса, видно, что верхнее значение превышает нижнее значение почти в 6 раз. Следовательно, между ними лежит большая зона, где движение жидкости в зависимости от условий может происходить в ламинарном или турбулентном режимах. Однако, ламинарный режим движения в этой зоне неустойчив и легко переходит в турбулентный. Такая зона называется *переходной*. В настоящее время в практических расчетах обычно исходят из одного критического значения числа Рейнольдса  $Re_{кр} = 2320$ .

Считается, что при  $Re < 2320$  всегда имеет место **ламинарный режим**, а при  $Re > 2320$  – **турбулентный режим**. Такой подход обеспечивает некоторый запас прочности при гидравлических расчетах.

Можно определить критическое значение числа Рейнольдса для труб не только круглого сечения, но и любой другой конфигурации.

Известно, что гидравлический радиус и диаметр связаны соотношением  $d = 4R_r$ .

Тогда

$$Re = \frac{v4R_r}{\nu},$$

откуда

$$\frac{vR_{\Gamma}}{\nu} = \frac{Re}{4}.$$

Принимая  $Re_{кр} = 2320$  независимо от формы живого сечения, находим критерий для сечения любой формы:  $\frac{2320}{4} = 575$ . Таким образом, если  $\frac{vR}{\nu} < 575$ , то режим будет ламинарный, если же  $\frac{vR}{\nu} > 575$ , то – турбулентный.

Под термином «**гидравлические сопротивления**» понимают силы трения, возникающие в реальной жидкости при ее движении. На преодоление гидравлических сопротивлений поток жидкости расходует часть удельной энергии, которую называют *гидравлическими потерями напора* [1]. Гидравлические потери зависят от режима движения жидкости, формы сечения русла и его изменения, характера поверхности стенок и вязкости жидкости. **Гидравлические потери напора** делятся на **потери на трение по длине** и **местные потери**. Гидравлические потери измеряются либо в линейных единицах – м, либо в единицах давления – Па.

Потери напора по длине обусловлены силами внутреннего трения и представляют собой потери энергии. Они складываются из сопротивления трения о стенки и возрастают пропорционально длине трубы. Местные сопротивления возникают при изменении направления и скорости потока.

Потерю напора на трение при установившемся равномерном прямолинейном движении потока по трубопроводу круглого сечения можно найти по формуле Вейсбаха – Дарси

$$h_l = \lambda \frac{l v^2}{d 2g}, \quad (1.6.2)$$

или в единицах давления

$$\Delta p_l = \lambda \frac{l \rho v^2}{d 2}, \quad (1.6.3)$$

где  $\lambda$  – коэффициент гидравлического трения (коэффициент Дарси), зависящий от режима движения потока и шероховатости стенок трубопровода.

Для ламинарного режима  $\lambda$  зависит только от числа Рейнольдса и определяется по формуле

$$\lambda = \frac{64}{Re}. \quad (1.6.4)$$

Формула Вейсбаха – Дарси справедлива и для турбулентного режима. Но в этом случае коэффициент  $\lambda$  зависит не только от числа  $Re$ , но и от шероховатости труб. Определение  $\lambda$  для турбулентного режима довольно сложная задача. В настоящее время его находят по эмпирическим формулам и графикам (например, график Никурадзе).

Экспериментально было установлено, что при турбулентном режиме существует три области, в которых коэффициент  $\lambda$  по-разному зависит от числа  $Re$ :

область гидравлически гладких труб (русел);  
переходная область (область доквадратического сопротивления);  
область гидравлически шероховатых труб (квадратического сопротивления).

Физическая картина существования этих областей в одной и той же трубе объясняется следующим образом.

У всякой трубы или русла на стенках имеются выступы шероховатости. Их высота зависит от материала труб, технологии их изготовления, времени эксплуатации, качества воды и т. д.

Согласно исследованиям Прандтля, в турбулентном потоке скорости непосредственно у стенок равны нулю.

Поэтому принято считать, что вблизи стенок русла имеется тонкий подслой жидкости толщиной  $\delta$ , где скорости столь малы, что в его пределах движение жидкости близко к ламинарному. Этот слой, толщина которого из-

меряется долями миллиметра, называется *вязким* (ламинарным) *подслоем*.

Если через  $\Delta$  обозначить среднюю высоту выступов шероховатости, то возможны следующие соотношения  $\Delta$  и  $\delta$  (Рисунок 1.6.4).



Рисунок 6.4 – К понятию «гладкой и шероховатой трубы»

Если  $\delta > \Delta$ , то выступы шероховатости прикрыты вязким подслоем, турбулентная часть потока не касается выступов и скользит по ламинарному слою как по гладкой трубе. В этом случае имеют место так называемые гидравлически гладкие трубы и потери напора не зависят от шероховатости трубы.

Если  $\delta < \Delta$ , то выступы шероховатости вклиниваются в турбулентную зону, и в них ударяются частицы турбулентного ядра потока. При этом потери напора и коэффициент  $\lambda$  зависят от шероховатости трубы.

Опыты показывают, что толщина ламинарного подслоя зависит от числа Рейнольдса. При увеличении числа  $Re$  толщина ламинарного подслоя уменьшается:

$$\delta = 30 \frac{d}{Re \sqrt{\lambda}}. \quad (1.6.5)$$

Поэтому понятия гидравлически гладкой и шероховатой стенки относительны. Одна и та же стенка в одних условиях (при малых  $Re$ ) может быть «гладкой», в других условиях (при больших  $Re$ ) – «шероховатой».

Поскольку выступы шероховатости неодинаковы, то пользуются понятием **эквивалентной шероховатости**  $\Delta_{\text{экв}}$ , т. е. такой равнозернистой шероховатости, при которой возникают потери на трение, равные потерям при

действительной шероховатости.

Значения  $\Delta_{экр}$  приведены в справочниках [13].

В табл. П.2 Приложения даны значения эквивалентной шероховатости для труб из разных материалов.

Эквивалентная шероховатость в зависимости от диаметра трубы по разному сказывается на величине гидравлических сопротивлений, поэтому в гидравлике используют понятие относительной шероховатости  $\Delta_{экр}/d$  или относительной гладкости  $d/\Delta_{экр}$ .

**Коэффициент гидравлического трения  $\lambda$**  при турбулентном режиме в зависимости от области сопротивления определяется как функция от  $Re$  и  $\Delta_{экр}/d$  (Рисунок 1.6.5).

Область сопротивления гидравлически гладких труб возникает при

$$Re < 10 \frac{d}{\Delta_{экр}} \quad (\delta > \Delta_{экр.})$$

Значение  $\lambda$  можно определить по формуле Блазиуса

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{0,25}} \quad (1.6.6)$$

или по формуле Конакова

$$\lambda = \frac{1}{(1,8 \lg Re - 1,5)^2}. \quad (1.6.7)$$

Переходная область сопротивления возникает при

$$10 \frac{d}{\Delta_{экр}} < Re < 500 \frac{d}{\Delta_{экр}} \quad (\delta \approx \Delta_{экр})$$

В этой области коэффициент  $\lambda$  рекомендуется вычислять по формуле Альтшуля.

$$\lambda = 0,11 \left( \frac{\Delta_{экр}}{d} + \frac{68}{Re} \right)^{0,25}. \quad (1.6.8)$$

Область шероховатых труб возникает при

$$Re > 500d/\Delta_{экр.}$$

При этом  $\lambda$  можно вычислить по формуле Шифринсона

$$\lambda = 0,11 \left( \frac{\Delta_{\text{экв}}}{d} \right)^{0,25} \quad (1.6.9)$$

Существуют и другие формулы для определения коэффициента  $\lambda$  при движении в трубах, изготовленных из различных материалов (стекло, пластмасса, бетон и т. д.). Они приведены в справочниках [1, 13, 14].

Кроме того,  $\lambda$  можно определить по таблицам и графикам, которые также приведены в справочниках, например, по графику Никурадзе (Рисунок 1.6.5).

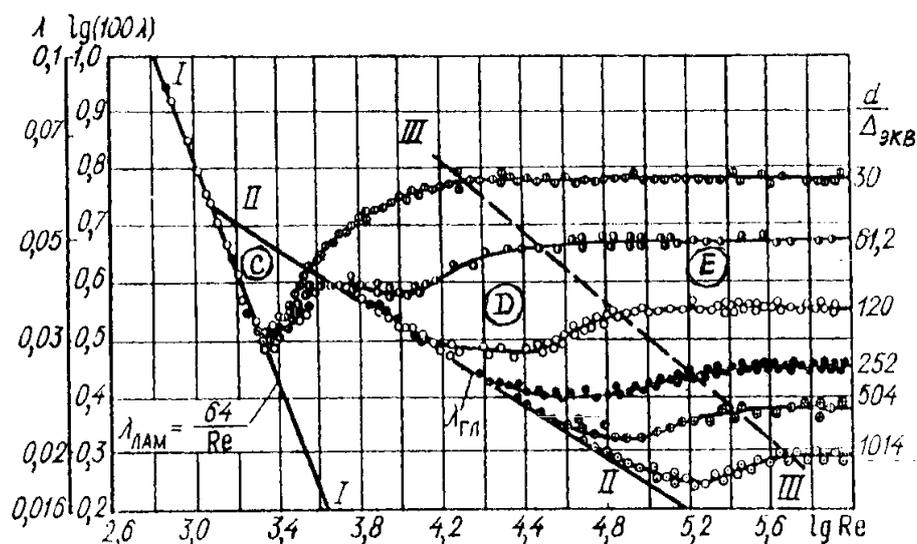


Рисунок 1.6.5. —График Никурадзе  $\lambda=f(Re, d/\Delta_{\text{экв}})$  для труб

с однородной равнозернистой шероховатостью

где I — зона ламинарного режима; II — зона переходного режима; III — зона турбулентного режима; прямая a-a — область гидравлически гладких русел; б — доквадратичная область сопротивлений; в — квадратичная область

Местные потери напора (энергии) обусловлены наличием местных гидравлических сопротивлений, к которым относятся вход и выход потока из трубы, внезапные сужения и расширения труб, колена, тройники, отводы,

диафрагмы, краны, задвижки, дроссели и т. д.

Сопротивления называются местными, поскольку они располагаются на малом участке потока ( $l_M \approx 0$ ) в определенном месте.

Местные потери напора, как и потери по длине, обусловлены работой сил трения.

Потери напора на преодоление местных сопротивлений определяют по формуле Вейсбаха:

$$h_M = \zeta_M \frac{v^2}{2g}, \quad (1.6.10)$$

или в единицах давления

$$\Delta p_M = \rho g h_M = \zeta_M \frac{\rho v^2}{2}, \quad (1.6.11)$$

где  $\zeta_M$  – коэффициент местного гидравлического сопротивления.

Коэффициент  $\zeta_M$  зависит от формы местного сопротивления и иногда от числа  $Re$  и определяется опытным путем.

Значения  $\zeta_M$  для различных видов местных сопротивлений приведены в справочниках по гидравлике [1, 13].

На Рисунок 1.6.6 приведены некоторые виды местных сопротивлений и значения  $\zeta_M$ .

Общие потери напора жидкости  $h_w$  складываются из потерь напора на трение (по длине трубопровода)  $h_l$  и суммы потерь на местные сопротивления:

$$h_w = h_l + \sum h_i = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} + \sum \zeta_i \frac{v^2}{2g} = \left( \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta_i \right) \frac{v^2}{2g} = \zeta_c \frac{v^2}{2g}, \quad (1.6.12)$$

где  $\zeta_c$  – коэффициент сопротивления системы, равный

$$\zeta_c = \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta_i.$$

Потери давления,  $Pa$

$$\Delta p = h_w \rho g = \left( \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta_i \right) \frac{\rho v^2}{2} = \zeta_c \frac{\rho v^2}{2}. \quad (1.6.13)$$

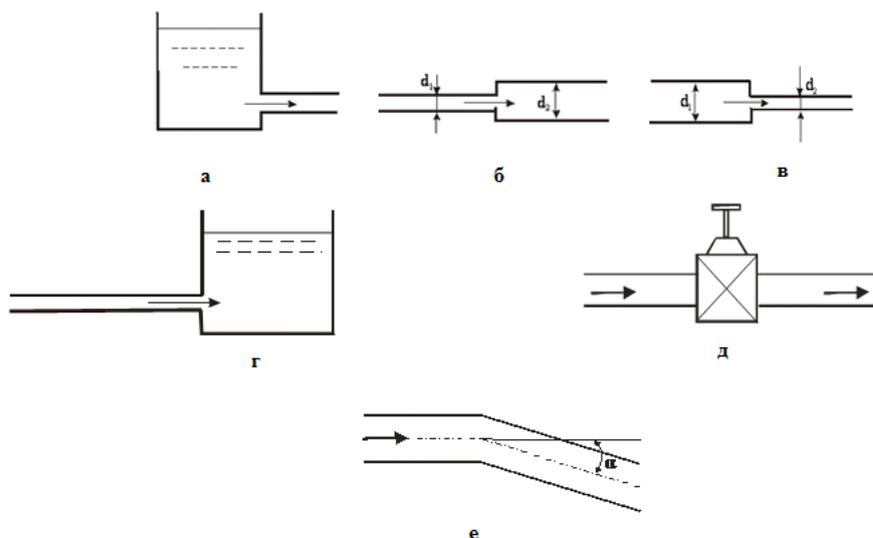


Рисунок 1.6.6. – Некоторые виды местных сопротивлений

где а – вход в трубу,  $\zeta_{\text{вх}}=0,5$ ;

б– внезапное расширение,

$$\zeta_{\text{вн.р}} = \left( \frac{v_1}{v_2 - 1} \right)^2 = \left( \frac{F_2}{F_1 - 1} \right)^2 = \left( \frac{d_2^2}{d_1^2 - 1} \right)^2;$$

в – внезапное сужение,

$$\zeta_{\text{вн.с}} = 0,5 \left( 1 - \frac{F_2}{F_1} \right) = 0,5 \left( 1 - \frac{d_2^2}{d_1^2} \right);$$

г – выход из трубы в резервуар,

$\zeta_{\text{вых}}=1$ ;

д– кран (задвижка),  $\zeta_{\text{кр}}$  зависит от конструкции крана, угла его закрытия;

е – поворот трубы (колесо),  $\zeta_{\text{пов}}=f(\alpha)$ .

### Контрольные вопросы

1. Назовите режимы движения жидкости. Чем они отличаются?
2. Как определяется число Рейнольдса?
3. Чему равно критическое число Рейнольдса для напорных трубопроводов и

открытых потоков.

4. Перечислите виды гидравлических потерь?
5. От чего зависят потери по длине?
6. Приведите формулу Вейсбаха–Дарси.
7. Как определяется коэффициент трения (Дарси) при ламинарном режиме?
8. Какие области сопротивления существуют при турбулентном режиме?
9. Чем отличаются гидравлически гладкие трубы от шероховатых?
10. Что понимается под эквивалентной шероховатостью?
11. Как определяется коэффициент трения при турбулентном режиме?
12. Чем обусловлены местные сопротивления?
13. Где встречаются местные сопротивления?
14. Как определяется величина местного сопротивления?
15. От чего зависит величина коэффициентов местных сопротивлений?

### Материалы практических занятий

*Задача 1.6.1.* Определить потери напора при подаче воды со скоростью 10 см/с через трубу диаметром  $d = 2,5$  см и длиной  $l = 25$  м при температуре воды  $t = 15^\circ\text{C}$  ( $\nu = 0,0114$  см<sup>2</sup>/с).

*Решение.*

Вычисляем число Рейнольдса

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{0,1 \cdot 0,025}{1,14 \cdot 10^{-6}} = 2193.$$

Так как  $Re < Re_{кр} = 2320$ , то режим движения жидкости ламинарный и поэтому

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64}{2193} = 0,029.$$

Потери напора в трубе, равные потерям напора по длине, определяем по формуле Вейсбаха–Дарси

$$h_l = \lambda \frac{l v^2}{d 2g} = 0,029 \cdot \frac{25}{0,025} \cdot \frac{0,1^2}{2 \cdot 9,81} = 0,015 \text{ м} = 1,5 \text{ см.}$$

*Задача 1.6.2.* Определить потери напора воды в трубе длиной  $l = 1200$  м при расходе  $V = 50$  л/с, если трубы имеют диаметр  $d = 250$  мм и абсолютную шероховатость  $\Delta = 0,5$  мм. Температура воды  $15$  °С ( $\nu = 0,0114$  см<sup>2</sup>/с)

*Решение.*

Вычисляем среднюю скорость движения воды в трубопроводе

$$v = \frac{4V}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0,05}{3,14 \cdot 0,25^2} = 1,02 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Находим число Рейнольдса

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{1,02 \cdot 0,25}{1,14 \cdot 10^{-6}} = 223684$$

Имеем  $Re > Re_{кр} = 2320$ , следовательно, режим движения турбулентный. Для определения области сопротивления вычислим граничные значения числа Рейнольдса

$$10 \frac{d}{\Delta} = 10 \frac{250}{0,5} = 5000;$$

$$500 \frac{d}{\Delta} = 500 \frac{250}{0,5} = 250000.$$

Так как имеем  $10d/\Delta < Re < 500d/\Delta$ , то область сопротивления переходная. Вычисляем коэффициент Дарси по формуле А. Д. Альтшуля

$$\lambda = 0,11 \left( \frac{68}{Re} + \frac{\Delta}{d} \right)^{0,25} = 0,11 \left( \frac{68}{223684} + \frac{0,5}{250} \right)^{0,25} = 0,024.$$

Тогда потери напора на трение в трубе

$$h_l = \lambda \frac{l v^2}{d 2g} = 0,024 \cdot \frac{1200}{0,25} \cdot \frac{1,02^2}{2 \cdot 9,81} = 6,11 \text{ м.}$$

*Задача 1.6.3.* Определить расход воды  $V$ , протекающей по горизонтальному трубопроводу, при следующих исходных данных: напор  $H = 4$  м, длина

трубопровода  $l = 52$  м, диаметр трубопровода  $d = 100$  мм, абсолютная шероховатость стенок трубопровода  $\Delta = 1$  мм, температура воды  $t = 20$  °С. Угол открытия пробкового крана  $20^\circ$ . Построить напорную и пьезометрическую линии.

*Решение.*

Составляем уравнение Бернулли для живых сечений 1 - 1 и 2 - 2 относительно горизонтальной плоскости сравнения О - О. Имеем

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + \sum h_{\pi}$$

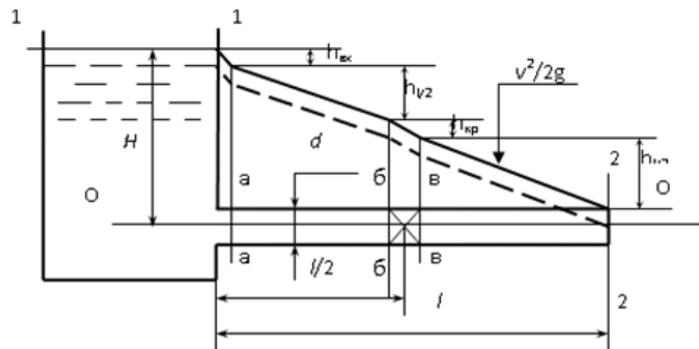


Рисунок 1.6.7 – Расчетная схема к задаче 1. 6.3

В данном случае  $z_1 = H$ ;  $z_2 = 0$ ;  $p_1 = p_2 = p_{ат}$ ;  $v_1 = 0$ ;  $v_2 = v$ . Тогда

$$H = \frac{v^2}{2g} + \sum h_{\pi}$$

Имеем

$$\sum h_{\pi} = h_l + \sum h_M = h_l + h_{вх} + h_{кр}$$

Подставив в  $H$  сумму потерь напора, получим

$$H = \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \zeta_{вх} \frac{v^2}{2g} + \zeta_{кр} \frac{v^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} \left( 1 + \frac{\lambda l}{d} + \zeta_{вх} + \zeta_{кр} \right).$$

Откуда находим скорость течения воды в трубопроводе

$$v = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\lambda l}{d} + \zeta_{\text{вх}} + \zeta_{\text{кр}}}} \sqrt{2gH}.$$

и расход

$$V = Fv = \frac{\pi d^2}{4} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\lambda l}{d} + \zeta_{\text{вх}} + \zeta_{\text{кр}}}} \sqrt{2gH}.$$

Для определения  $\lambda$  в первом приближении допускаем, что режим движения турбулентный, а область сопротивления квадратичная. Тогда

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{\Delta}{d}\right)^{0,25} = 0,11 \left(\frac{1}{100}\right)^{0,25} = 0,035.$$

При принятом допущении получим

$$V = \frac{3,14 \cdot 0,1^2}{4} \frac{1}{\sqrt{1 + 0,035 \frac{52}{0,1} + 0,5 + 1,56}} \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 4} = 0,015 \text{ м}^3/\text{с}.$$

При этом получим скорость течения

$$v = \frac{V}{F} = \frac{4V}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0,015}{3,14 \cdot 0,1^2} = 1,91 \text{ м/с}.$$

Число Рейнольдса будет равно

$$Re = \frac{1,91 \cdot 0,1}{1,01 \cdot 10^{-6}} = 189191.$$

Граничное значение числа Рейнольдса

$$500 \frac{d}{\Delta} = 500 \frac{100}{1} = 50000.$$

Так как  $Re > 500d/\Delta$ , то принятое допущение о турбулентном режиме и квадратичной области сопротивления подтверждается, и расход  $V$  вычислен правильно.

Для построения линии удельной энергии (напорной линии) вычисляем все потери напора

$$h_{\text{вх}} = \zeta_{\text{вх}} \frac{v^2}{2g} = 0,5 \frac{1,91^2}{2 \cdot 9,81} = 0,093 \text{ м};$$

$$h_{кр} = \zeta_{ур} \frac{v^2}{2g} = 1,56 \frac{1,91^2}{2 \cdot 9,81} = 0,29 \text{ м};$$

$$h_l = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = 0,035 \frac{52}{0,12} \frac{1,91^2}{2 \cdot 9,81} = 3,38 \text{ м}.$$

Напор в сечении 1 - 1  $H = 4$  (м);

в сечении а - а  $H_{а-а} = H - h_{вх} = 4 - 0,093 = 3,907$  (м);

в сечении б-б  $H_{б-б} = H - h_{вх} - h_l/2 = 3,907 - 1,69 = 2,217$  (м);

в сечении в-в  $H_{в-в} = H - h_{вх} - h_l/2 - h_{кр} = 2,217 - 0,29 = 1,927$  (м);

в сечении 2-2  $H_{2-2} = H - h_{вх} - h_l/2 - h_{кр} - h_l/2 = 1,927 - 1,69 = 0,237$  (м)

Пьезометрическая линия пройдет параллельно напорной ниже на величину  $v^2/2g = 1,91^2/2 \cdot 9,81 = 0,186$  (м).

**Решить самостоятельно задачи:**

**Задача 1.6.4.** Определить длину горизонтальной прямой трубы, по которой в количестве  $Q = 30,3$  л/с прокачивается мазут ( $\nu = 2000$  мм<sup>2</sup>/с при 20 °С), если внутренний диаметр трубы  $d = 0,2$  м, потери напора на рассматриваемом участке равны  $h_l = 2,2$  м.

**Задача 6.5.** Определить напор, необходимый для пропуска расхода  $V = 20$  л/с через трубопровод, показанный на рисунке. Диаметр трубопровода  $d = 200$  мм, длины участков –  $l_1 = 50$  м,  $l_2 = 100$  м,  $l_3 = 20$  м. Коэффициент  $\lambda = 0,025$ , коэффициенты сопротивлений: крана -  $\zeta_{кр} = 1,56$ ; колена -  $\zeta_{кол} = 1,19$ .

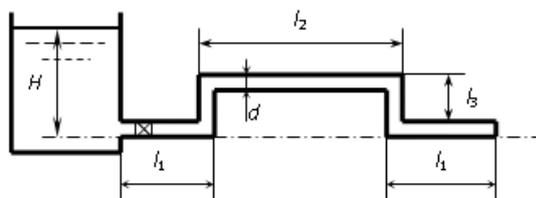


Рисунок 1.6.8 – Расчетная схема к задаче 6.5

*Задача 1.6.6.* Определить расход через систему труб при напоре  $H = 10$  м, если  $d_1 = 200$  мм,  $d_2 = 150$  мм,  $l_1 = 50$  м,  $l_2 = 85$  м,  $\lambda_1 = 0,025$ ,  $\lambda_2 = 0,030$ .

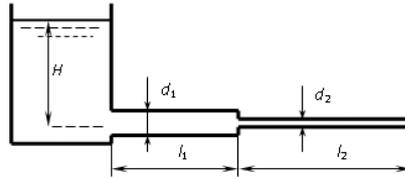


Рисунок 1.6.9 – Расчетная схема к задаче 6.6

*Задача 1.6.7.* Для трубопровода, показанного на рисунке, определить напор, необходимый для пропуска расхода 35 л/с, если  $d_1 = 150$  мм,  $d_2 = 250$  мм,  $l_1 = 80$  м,  $l_2 = 100$  м,  $\lambda_1 = 0,03$ ,  $\lambda_2 = 0,023$ . Построить напорную и пьезометрическую линии.

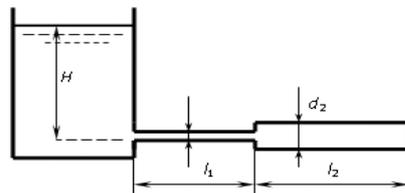


Рисунок 1.6.10 – Расчетная схема к задаче 1.6.7

*Задача 1.6.8.* Определить расход жидкости через трубопровод, показанный на рисунке, если суммарная длина его участков  $l = 100$  м, диаметр  $d = 15$  см, напор  $H = 5$  м. Коэффициент сопротивления крана  $\zeta_{кр} = 5,47$  ( $\alpha = 30^\circ$ ), колена  $\zeta_{кол} = 1,19$ .

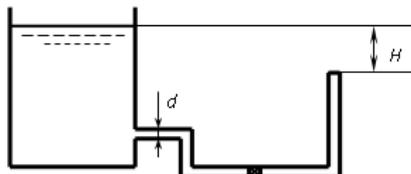


Рисунок 1.6.11 – Расчетная схема к задаче 1.6.8

*Задача 1.6.9.* По наклонному трубопроводу диаметром 200 мм подается вода с расходом 35 л/с. Давление воды в начальном сечении трубопровода  $p_1 = 200$  кПа, коэффициент гидравлического трения  $\lambda = 0,022$ . Определить давление во втором сечении, находящемся на расстоянии 500 м от начального сечения, если его центр тяжести расположен на 3 м выше центра тяжести начального сечения.

*Задача 1.6.10.* Определить напор  $H$ , который надо поддерживать в резервуаре, чтобы расход воды, пропускаемый по горизонтальному трубопроводу с  $d = 150$  мм, равнялся  $V = 35$  л/с. Угол открытия крана  $\alpha = 30^\circ$ , длина трубы  $l = 50$  м. Коэффициент Дарси  $\lambda = 0,023$ .

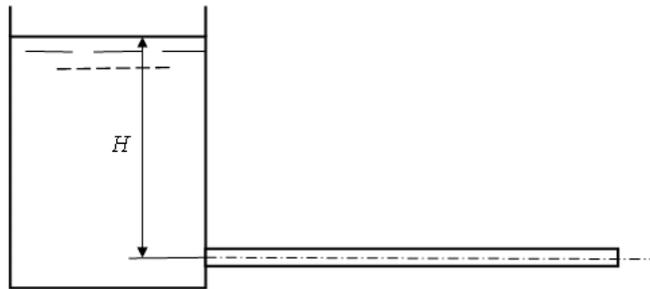


Рисунок 1.6.12 – Расчетная схема к задаче 1.6.10

### 1.7 Истечение жидкости из отверстий и насадков

Явление истечения жидкости из отверстий и насадков различных типов широко используется в различных технических устройствах и сооружениях.

Истечение жидкости из баков, котлов и других резервуаров через отверстия и насадки (короткие трубки) – процесс, характерный для многих технических устройств.

Например, течение бензина через жиклеры различных топливных систем двигателей внутреннего сгорания – это также истечение жидкости через отверстия и насадки.

Работа гидравлических амортизаторов, широко используемых в различных конструкциях мотоциклов и автомобилей, в шасси современных самолетов, производится в основном в результате истечения жидкости через малые отверстия.

В авиационной и ракетной технике истечение жидкости через насадки происходит при подаче топлива в камеры сгорания газотурбинных и жидкостно-реактивных двигателей [5, 7].

Истечение из насадков способствует интенсификации перемешивания жидкостей, поэтому они используются в кавитационных смесителях и других перемешивающих устройствах.

Роль цилиндрических насадков выполняют различные патрубки, служащие для выпуска жидкости из цистерн и резервуаров, краны, трубы для пропуска воды под насыпями дорог, водовыпуски в теле плотины и др.

Задача об истечении жидкости сводится главным образом к определению скорости истечения и расхода жидкости при разнообразных формах отверстий и насадков.

При этом условия истечения могут быть различными.

Вытекающая струя на выходе из отверстия и насадка может попадать в атмосферу, и тогда она будет находиться под атмосферным давлением (Рисунок 1.7.1); возможны случаи, когда струя вытекает под уровень жидкости, находящейся в другом сосуде или водохранилище (Рисунок 1.7.2).

Как в первом, так и во втором случаях на скорость и расход жидкости будут оказывать влияние сила тяжести и напор  $H$  (при истечении в атмосферу) или разность уровней  $z$  (при истечении из затопленного отверстия или насадка).

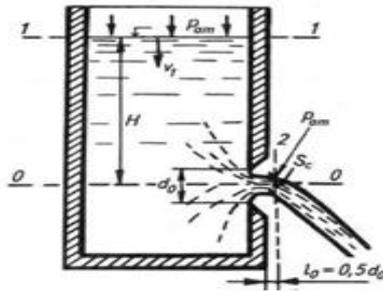


Рисунок 1.7.1. – Истечение жидкости через отверстие в атмосфере

Напор  $H$  или разность уровней  $z$  могут в процессе истечения оставаться постоянными, а могут изменяться, что, безусловно, будет влиять на параметры истечения. Характер истечения жидкости также зависит от вида отверстия или насадка.

Различают отверстия малые и большие, а также отверстия в тонкой и в толстой стенке. Отверстие называют **малым**, если его диаметр  $d$  (для круглых отверстий) или высота  $a$  (для прямоугольных) весьма малы по сравнению со значением напора  $H$ , т. е.  $d < 0,1H$ .

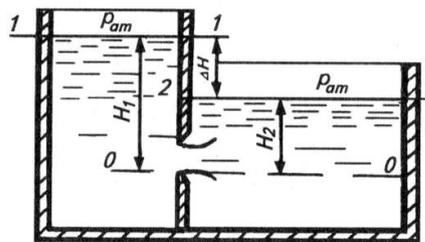


Рисунок 1.7.2. – Истечение жидкости через затопленное отверстие

Отверстие считают **большим отверстием**, если  $d \geq 0,1H$ .

Под **тонкой стенкой** подразумевают стенку такой толщины, которая не оказывает влияния на характер истечения. Опытами установлено, что толщина такой стенки  $b$  не должна превышать  $(1,5 - 3) d$  – диаметра отверстия. В этом случае вытекающая из отверстия струя не касается стенки в

пределах ее толщины, а острые края стенки не оказывают влияния на форму струи и ее гидравлические характеристики.

При увеличении толщины стенки больше  $3d$  характер истечения меняется и такое отверстие начинает работать как насадок, где стенки оказывают направляющее влияние на струю. Таким образом, **насадком** называется короткая труба (патрубок), присоединенная к отверстию для изменения характеристик истечения. Наиболее распространенными типами насадков (Рисунок 1.7.3) являются цилиндрические, конические и коноидальные насадки криволинейного очертания, повторяющие форму сжатой струи.

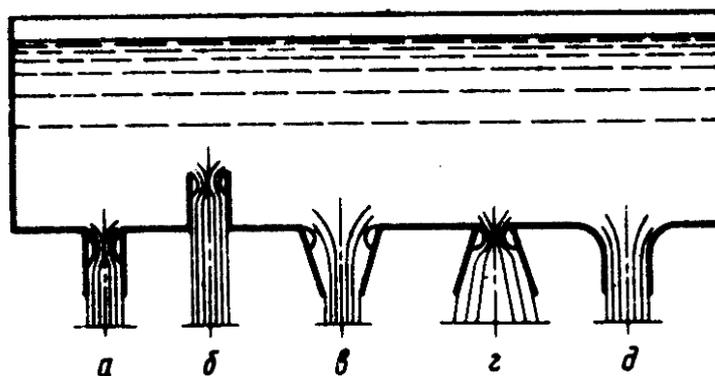


Рисунок 1.7.3. – Различные типы насадков:

- а – внешний цилиндрический; б – внутренний цилиндрический;  
в – конический сходящийся; г – конический расходящийся; д – коноидальный

В процессе истечения жидкости из отверстий и насадков на расстоянии  $l \approx (0,5 - 1,0) d$  от плоскости отверстия образуется так называемое **сжатое сечение струи**. Это объясняется тем, что струйки жидкости внутри сосуда подходят к отверстию по плавным криволинейным траекториям и согласно первому закону механики стремятся сохранить свои траектории в дальнейшем. В результате частицы жидкости сталкиваются, давят друг на друга, вызывая сжатие струи. Сжатие характеризуется коэффициентом  $\epsilon$ , который представляет собой отношение площади сжатого сечения струи  $F_c$  к площади сечения отверстия  $F_0$  (см. Рисунок 1.7.1):

$$\varepsilon = \frac{F_c}{F_0} \quad (1.7.1)$$

Сжатие может быть совершенным и несовершенным, полным и неполным. Совершенным сжатие будет в том случае, если боковые стенки и днище сосуда достаточно удалены от ближайшей точки контура отверстия и не влияют на характер истечения, т. е. если  $l_1 \geq 3a$ ,  $l_2 \geq 3b$  (Рисунок 1.7.4). Если это условие не соблюдается, то сжатие называют несовершенным. При несовершенном сжатии коэффициент сжатия увеличивается.

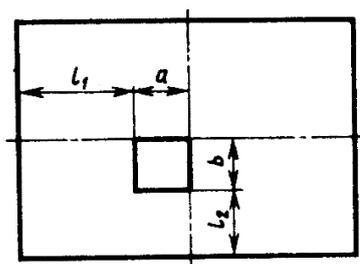


Рисунок 1.7.4. – К понятию совершенного и несовершенного сжатия струи

Полное сжатие струи – сжатие всестороннее, равномерное по всему периметру отверстия. Неполное сжатие происходит в том случае, если струя не испытывает сжатия по одной или нескольким сторонам, т. е. если часть периметра отверстия совпадает с боковой стенкой или днищем сосуда.

При истечении струи в атмосферу происходит изменение формы струи по ее длине и закручивание. Это явление называется *инверсией струи*. Оно обусловлено главным образом действием сил поверхностного натяжения на вытекающие из отверстия элементарные струйки. Инверсия больше проявляется в некруглых отверстиях, причем поперечное сечение струи изменяет свою форму по мере удаления его от отверстия и в зависимости от формы отверстия. При истечении из квадратного отверстия сечение струи принимает

форму восьмиугольника, затем переходит в крестообразную форму и т. д. [2, 15].

Рассмотрим общий случай, когда жидкость находится в резервуаре, на свободную поверхность которой действует внешнее давление  $p_{\text{атм}}$ .

В стенке резервуара имеется малое отверстие круглой формы, расположенное на достаточно большой глубине  $H$  от свободной поверхности и на достаточном удалении от других стенок и дна (см. Рисунок 1.7.1); происходящее в этом случае истечение жидкости будет совершенным и полным.

Запишем **уравнение Бернулли**, характеризующее движение жидкости, в двух сечениях: в сечении  $0-0$ , взятом на свободной поверхности, где скорость движения жидкости ничтожно мала и ее можно принять равной нулю по сравнению со скоростью в отверстии, и в сечении  $I-I$ , проведенном через центр сжатого сечения струи и совпадающем с плоскостью сравнения:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + \zeta \frac{v_2^2}{2g},$$

где  $\zeta$  – коэффициент сопротивления отверстия;

Имеем

$$z_1 = H; z_2 = 0; p_1 = p_2 = p_{\text{атм}}; v_1 = 0; v_2 = v.$$

Проведя преобразования данного уравнения, получим

$$H = (1 + \zeta) \frac{v^2}{2g},$$

откуда определим скорость истечения:

$$v = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta}} \sqrt{2gH} = \varphi \sqrt{2gH}, \quad (1.7.1)$$

где  $\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta}}$  – коэффициент скорости – безразмерная величина, ха-

рактеризующая уменьшение скорости по сравнению с теоретической в результате потерь напора на преодоление сопротивления в отверстии.

Откуда можно выразить коэффициент сопротивления  $\zeta$  через коэффициент скорости:

$$\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1 \quad (1.7.2)$$

Если жидкость идеальная,  $\zeta = 0$ ; следовательно,  $\varphi = 1$ . Тогда из формулы (7.1) получим теоретическую скорость истечения:

$$v_T = \sqrt{2gH} \quad (1.7.3)$$

Уравнение (7.3) носит название формулы Торричелли — по имени выдающегося итальянского физика средневековья, впервые установившего эту зависимость. Отметим, что эта формула тождественна с известной из теоретической механики и физики формулой для определения скорости свободного падения тела. Следовательно, скорость истечения идеальной жидкости из отверстия сосуда с постоянным уровнем  $H$  и при атмосферном давлении равна скорости свободного падения твердого тела при начальной скорости, равной нулю, с высоты, соответствующей высоте напора жидкости.

Сравнивая уравнения (1.7.1) и (1.7.3), можно установить, что коэффициент скорости есть отношение действительной скорости истечения к теоретической:

$$\varphi = \frac{v}{v_T} \quad (1.7.4)$$

Используя известные зависимости, определим расход жидкости при истечении из отверстия:

$$V = vF_c = vF_0\varepsilon = F_0\varepsilon\varphi\sqrt{2gH}. \quad (1.7.5)$$

Произведение коэффициентов сжатия  $\varepsilon$  и скорости  $\varphi$  представляет собой коэффициент расхода, обозначаемый  $\mu$ :

$$\mu = \varepsilon\varphi \quad (1.7.6)$$

Следовательно, формула (1.7.5) может быть представлена как

$$V = \mu F_0 \sqrt{2gH} \quad (1.7.7)$$

Отсюда коэффициент расхода можно представить, как отношение действительного расхода  $V_k$  теоретическому  $V_T$ :

$$\mu = V/F_0 \sqrt{2gH} = V/V_T. \quad (1.7.8)$$

Коэффициенты истечения  $\epsilon$ ,  $\varphi$  и  $\mu$  для малого отверстия в тонкой стенке зависят от значения числа Рейнольдса  $Re$ , которое можно определить по теоретической скорости истечения:

$$Re = \frac{v_T d}{\nu} = \frac{d \sqrt{2gH}}{\nu} \quad (1.7.9)$$

При больших числах Рейнольдса, т. е. при значениях  $Re > 10^4$ , коэффициенты истечения для малого отверстия можно принять [13]:

$$\epsilon = 0,62 - 0,64; \varphi = 0,97; \mu = 0,60 - 0,62; \zeta = 0,06.$$

В инженерной практике часто приходится сталкиваться с истечением жидкости не в атмосферу, а в пространство, заполненное этой же жидкостью, уровень которой расположен выше отверстия.

Истечение такого характера называется **истечением под уровень** или **истечением через затопленное отверстие**. Такие случаи имеют место при выпуске воды через щитовые окна шлюзов или через затворы плотины.

Рассмотрим истечение из малого затопленного отверстия под уровень жидкости при постоянном напоре (см. Рисунок 1.7.2).

Уровни в резервуарах с обеих сторон стенки постоянны, а давление на свободные поверхности равно атмосферному.

Запишем уравнение Бернулли для двух сечений, совпадающих со свободными поверхностями жидкостей по обе стороны стенки. Плоскость сравнения проведем через ось отверстия.

Учитывая, что скорости жидкости на свободных поверхностях очень малы, примем их равными нулю.

Тогда уравнение Бернулли будет иметь вид:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \sum h_w,$$

где  $\sum h_w = h_1 + h_2$  – суммарные потери напора:  $h_1 = \zeta \frac{v^2}{2g}$  – на преодоление сопротивления в отверстии;  $h_2 = \frac{v^2}{2g}$  – на расширение элементарных струек и вихреобразование после отверстия во втором резервуаре.

Подставив значение суммарных потерь и переписав уравнение Бернулли относительно  $z$  с учетом, что  $p_1 = p_2$ , получим

$$z = z_1 - z_2 = (\zeta + 1) \frac{v^2}{2g},$$

откуда значение скорости истечения под уровень будет равно:

$$v = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta}} \sqrt{2gz} \quad (1.7.10)$$

или

$$v = \varphi \sqrt{2gz} \quad (1.7.11)$$

Как и при истечении жидкости в атмосферу, расход можно выразить через площадь струи  $F_c = F_0 \varepsilon$  и скорость  $v$ :

$$V = \varepsilon F_0 \varphi \sqrt{2gz} = \mu F_0 \sqrt{2gz} \quad (1.7.12)$$

Простое сравнение показывает, что формулы для определения скорости и расхода при истечении жидкости через затопленное отверстие аналогичны формулам, полученным ранее для случая истечения жидкости в атмосферу. Отличие состоит в том, что в выражениях (1.7.11) и (1.7.12) вместо напора  $H$  учитывается разность уровней  $z$ .

Рассмотрим истечение жидкости через внешний цилиндрический насадок (Рисунок 1.7.5).

Как и в случае истечения из отверстия, струя на выходе из сосуда и на

входе в насадок подвергается сжатию, а затем постепенно расширяется и заполняет все сечения. Из насадка струя вытекает, имея полную площадь сечения; поэтому коэффициент сжатия на выходе  $\varepsilon = 1$ , а коэффициент расхода  $\mu = \varphi$ .

Процессы сжатия струи в насадке и при истечении из отверстия отличаются друг от друга. Струя в насадке ограничена твердыми стенками, поэтому вокруг сжатой струи образуется зона «отжима» или кольцевое «мертвое» пространство. Это пространство периодически заполняется жидкостью, находящейся в вихреобразном, круговоротном движении, и периодически жидкость из этой зоны уносится основным потоком. Вследствие этого давление в «мертвом» пространстве становится меньше атмосферного, и там создается вакуум, способствующий выделению из жидкости пузырьков воздуха (явление кавитации). Воздух затем захватывается протекающей по насадку жидкостью и уносится потоком.

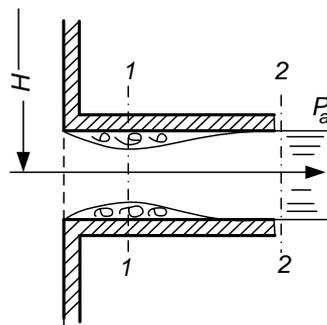


Рисунок 1.7.5 –Истечение через внешний цилиндрический насадок

Наличие вакуума объясняет увеличение расхода при истечении из насадка по сравнению с истечением из отверстия в тонкой стенке. Благодаря вакууму насадок работает как своеобразный насос, подсасывая дополнительное количество жидкости.

Это явление можно наблюдать с помощью простого опыта (Рисунок

1.7.6). Изогнутая стеклянная трубка, присоединенная к насадке в месте предполагаемого наибольшего сжатия струи и опущенная другим концом в открытый сосуд с жидкостью, начинает засасывать эту жидкость в трубку.

По высоте жидкости в стеклянной трубке  $h_{\text{вак}}$  можно судить о создаваемом насадком вакууме.

Эксперименты дают следующее соотношение:  $h_{\text{вак}} = 0,75H$ , где  $H$ — напор.

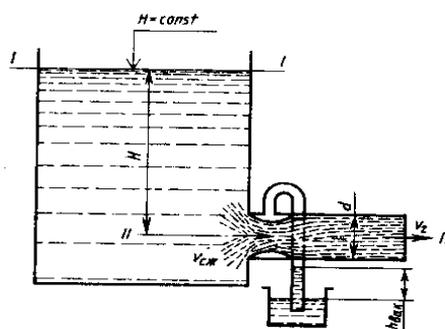


Рисунок 1.7.6 – Образование вакуума в цилиндрическом насадке

Расчетные формулы для определения скорости истечения жидкости через цилиндрический насадок и ее расхода можно получить, составив уравнение Бернулли для двух сечений  $I - I$  и  $II - II$  и проведя плоскость сравнения через ось насадка:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + \sum h_{1-2} .$$

Учитывая, что  $z_1 = H$ ;  $p_1 = p_2 = p_{\text{атм}}$ ;  $v_1 = 0$ ;  $z_2 = 0$ , уравнение можно записать в виде

$$H = \frac{v_2^2}{2g} + \sum h_{1-2} \quad (1.7.13)$$

Опуская математические выводы, значения суммарных потерь  $\sum h_{1-2}$  из уравнения (7.13), получим:

$$H = \frac{v_2^2}{2g} + \zeta_n \frac{v_2^2}{2g} = (1 + \zeta_n) \frac{v_2^2}{2g} \quad (1.7.14)$$

Отсюда скорость истечения:

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_n}} \sqrt{2H} = \varphi_n \sqrt{2gH} \quad (1.7.15)$$

Расход жидкости для насадка:

$$V = F_0 v_2 = F_0 \varphi_n \sqrt{2gH},$$

но так как  $\varphi_n = \mu_n$ , расход можно выразить также формулой

$$V = \mu_n F_0 \sqrt{2gH}. \quad (1.7.16)$$

Анализируя полученные формулы (1.7.15) и (1.7.16), видим, что они отличаются от аналогичных уравнений (1.7.11) и (1.7.12), выведенных ранее для определения скорости истечения из малого отверстия и расхода, лишь значениями коэффициентов. Коэффициент сжатия струи в цилиндрическом насадке для выходного сечения, как уже отмечалось, равен единице, т. е.  $\varepsilon_0=1$ , а для самого узкого сечения при больших значениях  $Re$  и  $\zeta = 0$  его можно принять равным коэффициенту сжатия при истечении из отверстия в тонкой стенке  $\varepsilon_c = 0,64$ .

Тогда в формулах (1.7.15) и (1.7.16) значение коэффициентов скорости и расхода  $\varphi_n = \mu_n = 0,84$ . Однако с учетом потерь по длине насадка и на основании опытных данных эти коэффициенты принимают  $\varphi_n = \mu_n = 0,82$  [13].

Сравнивая полученные значения коэффициентов для цилиндрического насадка и для малого отверстия, можно сделать важные выводы.

Коэффициент расхода для цилиндрического насадка больше, чем коэффициент расхода для малого отверстия на 32%:

$$\mu_n/\mu_0 = 0,82/0,62 = 1,32 \quad (1.7.17)$$

Коэффициент скорости для цилиндрического насадка, наоборот, оказывается меньше коэффициента скорости для малого отверстия на 15%:

$$\varphi_n/\varphi_0 = 0,82/0,97 = 0,85 \quad (1.7.18)$$

Таким образом, внешний цилиндрический насадок увеличивает расход жидкости и вместе с тем существенно снижает скорость ее истечения по

сравнению с малым отверстием.

Рассмотренный режим истечения жидкости, при котором струя после сжатия полностью заполняет сечение насадка, называется безотрывным. Однако существуют такие режимы, когда напор достигает некоторого критического значения, при котором струя после сжатия уже не расширяется, а сохраняет цилиндрическую форму и перемещается внутри насадка, не соприкасаясь с его стенками. Происходит отрыв струи. Истечение жидкости в этом случае становится таким же, как из малого отверстия в тонкой стенке (коэффициенты истечения сохраняют те же значения). Следовательно, при переходе от первого режима ко второму скорость истечения возрастает, а расход уменьшается. Это следует иметь в виду при формировании напора, который не должен превышать  $H_{кр} \approx 11$  м.

**Внутренний цилиндрический насадок.** Через насадок этого типа жидкость истекает так же, как через внешний (Рисунок 1. 7.7). Однако, несмотря на то что коэффициент сжатия в этом случае тоже равен единице ( $\epsilon = 1$ ), коэффициенты скорости и расхода для заполненного внутреннего насадка меньше, чем для внешнего:

$$\varphi = \mu = 0,71. (7.19)$$

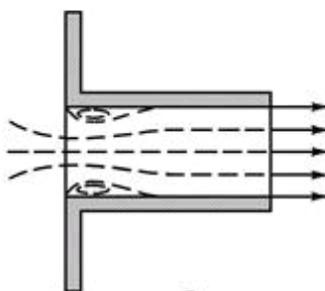


Рисунок 1.7.7 – Внутренний цилиндрический насадок

Это показывает, что гидравлические сопротивления цилиндрического внутреннего насадка больше, чем внешнего. Кроме того, в «мертвой» зоне

внутреннего насадка степень вакуума меньше, а следовательно, меньше и расход жидкости. Поэтому внешние насадки, как правило, находят более широкое применение, чем внутренние.

**Конический расходящийся насадок.** Этот насадок представляет собой усеченный конус, меньшее основание которого присоединено к отверстию в стенке сосуда (Рисунок 7.8).

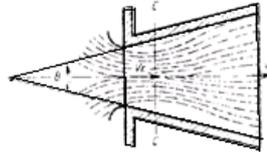


Рисунок 1.7.8 – Конический расходящийся насадок

Скорость  $v_1$  струи на входе в сжатом сечении значительно больше скорости  $v_2$  струи на выходе из насадка, а давление согласно уравнению Бернулли, наоборот, меньше, т. е.  $p_1 < p_{\text{атм}}$ . Следовательно, в коническом расходящемся насадке имеется вакуум, причем степень его больше, чем во внешнем цилиндрическом насадке. Это подтверждается также степенью сжатия струи, которая достигает в насадке данного типа наибольшего значения. Внешнего сжатия на выходе из насадка здесь нет, и следовательно, коэффициент сжатия на выходе  $\varepsilon = 1$ .

Однако при угле конусности  $\theta > 8^\circ$  происходит отрыв струи от стенок насадка, и он перестает работать полным сечением. Истечение становится аналогичным истечению струи через малое отверстие. Потери энергии в расходящемся насадке больше, чем в цилиндрическом из-за максимального сжатия и наибольшего расширения после сжатия. Значения коэффициентов скорости  $\varphi$  и расхода  $\mu$  в коническом расходящемся насадке зависят от угла конусности и от оформления входа в насадок. В среднем при углах  $\theta = 5 - 7^\circ$  эти коэффициенты относительно выходного сечения следует принимать

$$\varphi = \mu = 0,45. \quad (1.7.20)$$

Ввиду малого значения коэффициента расхода на первый взгляд может показаться неправдоподобным, что конический расходящийся насадок дает столь большой расход жидкости. Однако, если отнести расход к малому сечению насадка, равному отверстию в стенке, то коэффициент достигнет значения  $\mu = 2 - 3$ .

Таким образом, если к отверстию в тонкой стенке присоединить конический расходящийся насадок, то расход жидкости значительно возрастет: насадок как бы «подсасывает» дополнительное количество жидкости.

**Конический сходящийся насадок.** Насадок представляет собой усеченный конус и присоединяется к отверстию в стенке сосуда большим основанием (Рисунок 1.7.9).

В коническом сходящемся насадке степень вакуума в сжатом сечении меньше, чем в цилиндрическом и коническом расходящемся насадках:

$$h_{\text{вак. сж}} < h_{\text{вак. ц}} < h_{\text{вак. расх.}} \quad (1.7.21)$$

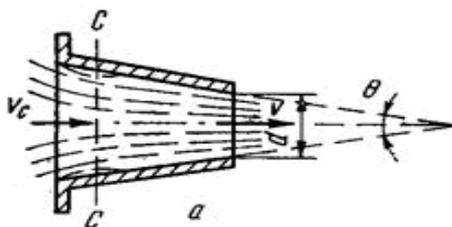


Рисунок 1.7.9 – Конический сходящийся насадок

Анализируя неравенство (1.7.21), можно утверждать, что при одинаковых значениях напора  $H$  для всех трех типов насадков будем иметь следующее соотношение скоростей:

$$v_{\text{сж}} > v_{\text{ц}} > v_{\text{расх.}} \quad (1.7.22)$$

Итак, в сходящемся насадке скорость максимальна по сравнению с двумя другими типами насадков. Поскольку скорость истечения жидкости  $v_c$  коэффициентом скорости  $\varphi$  связана зависимостью (1.7.15), то будет справед-

ливо следующее неравенство:

$$\varphi_{сх} > \varphi_{ц} > \varphi_{расх}. \quad (1.7.23)$$

На практике коэффициент скорости непрерывно растет с увеличением угла конусности  $\theta$  от  $0$  до  $50^\circ$ , а коэффициент расхода сначала растет и достигает максимального значения при  $\theta = 13^\circ$  ( $\mu = 0,95$ ), а затем начинает уменьшаться и при  $\theta = 48^\circ 50'$   $\mu = 0,85$ .

С учетом неравенства (1.7.21) экспериментально установлено соотношение расходов жидкостей для рассматриваемых насадков:

$$V_{сх} < V_{ц} < V_{расх}. \quad (1.7.24)$$

**Коноидальный насадок (сопло).** Насадок имеет на входе внутреннее очертание, близкое по форме к естественно сжимающейся струе, а выходной его участок цилиндрический (Рисунок 1.7.10).

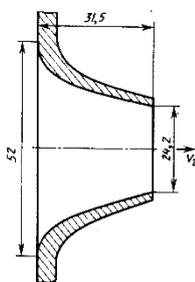


Рисунок 1.7.10 – Коноидальный насадок

Такая форма насадка обеспечивает безотрывность течения струи на входе и параллельность в выходном сечении. Потери напора весьма малы. Значение коэффициента сопротивления  $\zeta \approx 0,03 - 0,10$ , так как внутреннее сжатие здесь минимальное, а внешнее отсутствует ( $\varepsilon = 1$ ). Следовательно, коэффициенты скорости и расхода равны между собой и имеют наибольшие значения  $\varphi = \mu = 0,97$ , а при особо тщательном изготовлении насадка и гладких стенках составляют  $0,99$ .

**Диффузорный насадок.** Насадок представляет собой комбинацию сопла и диффузора (Рисунок 1.7.11). Приставка диффузора позволяет снизить давление в самом узком сечении насадка, а следовательно, согласно уравне-

нию Бернулли увеличить скорость и расход жидкости. Без изменения диаметра сопла в самом узком сечении и при том же напоре диффузорная приставка позволяет увеличить расход в 2,5 раза по сравнению с расходом, который обеспечивает сопло.

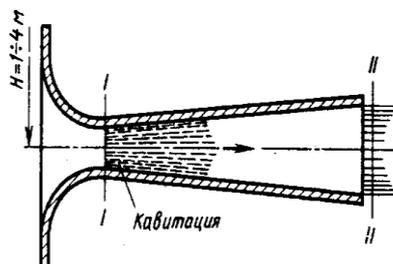


Рисунок 1.7.11 – Диффузорный насадок

Поэтому диффузорные насадки нужны в тех случаях, если требуется получить возможно большой расход. Однако их применение ограничивается высотой напора  $H=1-4$  м. При больших напорах в узком сечении сопла возникает кавитация жидкости, в результате которой расход резко снижается.

### Контрольные вопросы

1. Какое отверстие называют малым?
2. Какую стенку считают тонкой?
3. Почему образуется сжатое сечение струи?
4. Назовите виды сжатия струи при истечении из малого отверстия.
5. Приведите формулы для определения скорости и расхода при истечении из малого отверстия.
6. Назовите численные значения коэффициентов сжатия, скорости и расхода при истечении из малого отверстия.
7. Чем объясняется увеличение расхода при истечении из насадка по сравнению с истечением из отверстия в тонкой стенке?

8. Приведите численные значения коэффициентов скорости и расхода при истечении из внешнего цилиндрического насадка.
9. Перечислите другие виды насадков и приведите численные значения их коэффициентов скорости и расхода.
10. Какой насадок при одинаковых входных диаметрах обеспечивает пропуск наибольшего расхода? Объясните почему.

### Материалы практических занятий

*Задача 1.7.1.* Из открытого резервуара через круглое отверстие диаметром  $d = 4,5$  см в его стенке требуется пропустить расход воды  $V = 6$  л/с. Определить: а) какой напор  $H$  обеспечит заданный расход; б) как изменится расход, если к отверстию присоединить внешний цилиндрический насадок диаметром  $d = 4,5$  см при вычисленном напоре  $H$ .

*Решение.*

Напор над центром отверстия определим из формулы

$$V = \mu F \sqrt{2gH} \rightarrow H = \frac{V^2}{\mu^2 F^2 2g}.$$

Площадь отверстия

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,045^2}{4} = 0,0016 \text{ м}^2.$$

Тогда

$$H = \frac{0,006^2}{0,62^2 \cdot 0,0016^2 \cdot 2 \cdot 9,81} = 1,86 \text{ м}.$$

Расход через насадок при найденном напоре  $H$  найдем из той же формулы, подставив в нее коэффициент расхода для цилиндрического насадка  $\mu = 0,82$

$$V = \mu F \sqrt{2gH} = 0,82 \cdot 0,0016 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1,86} = 0,0079 \frac{\text{м}^3}{\text{с}} = 7,9 \text{ л/с}.$$

Расход увеличился  $7,9/6 = 1,32$ , т. е. на 32 %.

*Задача 1.7.2.* В вертикальной стенке, разделяющей открытый резервуар на две части, расположено круглое отверстие диаметром  $d_1 = 45$  мм. Глубина воды в левой части резервуара  $h_1 = 1,8$  м. Расход через отверстие  $V = 3,2$  л/с. Определить глубину  $h_2$ , диаметр  $d_2$  отверстия в наружной стенке при постоянных уровнях воды в резервуаре. Центры обоих отверстий расположены на расстоянии  $e = 50$  см от дна.

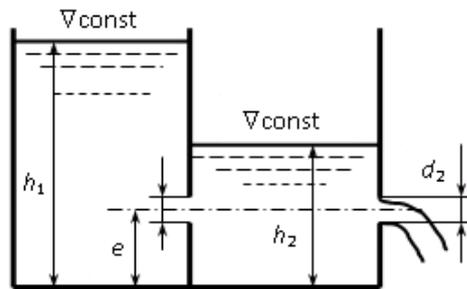


Рисунок 1.7.12 – Схема к задаче 1.7.2

*Решение.*

Определим разность уровней в правой и левой частях бака, из уравнения расхода через затопленное отверстие

$$V = \mu F \sqrt{2gZ} \rightarrow Z = \frac{V^2}{\mu^2 F^2 2g}.$$

Площадь отверстия

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,045^2}{4} = 0,0016 \text{ м}^2.$$

Тогда

$$Z = \frac{0,0032^2}{0,62^2 \cdot 0,0016^2 \cdot 2 \cdot 9,81} = 0,53 \text{ м}.$$

Следовательно, глубина в правой части

$$h_2 = h_1 - Z = 1,8 - 0,53 = 1,27 \text{ м}.$$

Напор над центром наружного отверстия

$$H_2 = h_2 - e = 1,27 - 0,5 = 0,77 \text{ м.}$$

Определяем площадь наружного отверстия при расходе 3,2 л/с и напоре  $H_2 = 0,77$  м

$$F = \frac{V}{\mu\sqrt{2gH}} = \frac{0,0032}{0,62\sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,77}} = 0,00133 \text{ м}^2.$$

При этой площади диаметр отверстия

$$d_2 = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,00133}{3,14}} = 0,041 \text{ м} = 4,1 \text{ см.}$$

*Задача 1.7.3.* В середине боковой стенки резервуара у самого дна находится квадратное отверстие со стороной  $a = 4,5$  см. Определить при какой глубине  $h_1$  воды в резервуаре и свободном истечении отверстие пропускает расход 8 л/с. Какой должна быть сторона отверстия, чтобы пропустить тот же расход при затопленном истечении, если глубина воды за отверстием  $h_2 = 150$  см.

*Решение.*

Так как отверстие расположено у дна, сжатие будет неполным и коэффициент его расхода будет больше. Коэффициент расхода при неполном сжатии определим по формуле

$$\mu_{\text{неп}} = \mu \left( 1 + k \frac{\Pi_1}{\Pi} \right),$$

где  $\mu$  – коэффициент расхода отверстия при полном совершенном сжатии;  $\Pi_1$  – часть периметра отверстия, по которой отсутствует сжатие;  $\Pi$  – полный периметр отверстия;  $k$  – коэффициент, равный 0,13 для круглого отверстия, 0,15 – для прямоугольного отверстия.

Получим:

$$\mu_{\text{неп}} = 0,62 \left( 1 + 0,15 \frac{4,5}{4 \cdot 4,5} \right) = 0,643.$$

Из формулы расхода через затопленное отверстие определим напор над центром отверстия

$$H = \frac{V^2}{\mu^2 F^2 2g} = \frac{0,008^2}{0,643^2 \cdot 0,045^4 \cdot 2 \cdot 9,81} = 1,92 \text{ м},$$

где  $F = a^2$  – площадь квадратного отверстия.

Глубина воды в резервуаре

$$h_1 = H + \frac{a}{2} = 1,92 + \frac{0,045}{2} = 1,9425 \text{ м} \approx 1,94 \text{ м}.$$

Разность уровней при затопленном истечении

$$Z = h_1 - h_2 = 1,94 - 1,50 = 0,44 \text{ м}.$$

Площадь отверстия при затопленном истечении

$$F = \frac{V}{\mu \sqrt{2gZ}} = \frac{0,008}{0,643 \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,44}} = 0,0042 \text{ м}^2.$$

Сторона квадратного отверстия

$$a = \sqrt{F} = \sqrt{0,0042} = 0,065 \text{ м} = 6,5 \text{ см}.$$

**Решить самостоятельно задачи.:**

*Задача 1.7.4.* Определить диаметр отверстия в стенке резервуара, которое способно при напоре 2 м пропустить расход 3,0 л/с.

*Задача 1.7.5.* Резервуар разделен перегородкой на два отсека. В перегородке сделано отверстие диаметром 5 см, через которое жидкость перетекает из левой части в правую при постоянных уровнях воды в отсеках. Определить, какой будет глубина в правой части, если глубина в левой части  $h_1 = 2$  м.

*Задача 1.7.6.* Как изменится расход, если к отверстию диаметром 5 см присоединить внешний цилиндрический насадок того же диаметра? Напор

над центром отверстия 1,2 м. Каким должен быть напор, чтобы расход, проходящий через насадок остался таким же, что и через отверстие?

*Задача 1.7.7.* К круглому отверстию в тонкой стенке последовательно присоединяют насадки: внешний цилиндрический (Вентури), внутренний цилиндрический (Борда), конически сходящийся, конически расходящийся и коноидальный. Определить расход и скорость в выходном сечении всех насадков и отверстия, если все они будут находиться под одинаковым напором  $H = 2$  м при свободном истечении. Диаметры выходного сечения отверстия и всех насадков, кроме расходящегося,  $d = 50$  мм. Расходящийся насадок имеет диаметр входного сечения 50 мм и угол роспуска  $\theta = 7^\circ$ . Угол конусности сходящегося насадка  $\theta = 13^\circ$ . Длина насадков  $l = 20$  см.

*Задача 1.7.8.* В резервуаре сделаны два одинаковых круглых отверстия диаметром  $d = 5,5$  см. Одно отверстие находится в стенке резервуара, с центром на расстоянии 25 см от дна, другое в дне резервуара. Глубина воды в резервуаре 90 см. Определить суммарный расход из отверстий. Как изменится глубина воды в резервуаре, если к отверстиям присоединить внешние цилиндрические насадки, и пропускать тот же суммарный расход, который получен при истечении из отверстий.

*Задача 1.7.9.* Истечение воды из герметически закрытого резервуара в атмосферу происходит при постоянном напоре  $H = 3,2$  м через внешний цилиндрический насадок диаметром  $d = 10$  см. Какое давление надо создать на свободной поверхности жидкости в резервуаре, чтобы расход при истечении не превышал  $Q = 70$  л/с.

*Задача 1.7.10.* Через круглое отверстие диаметром 4 см вытекает вода с расходом 10 л/с. Определить напор, необходимый для пропуска этого расхода. Какой должна быть сторона квадратного отверстия, чтобы пропустить тот же расход при том же напоре?

## 1. 8 Расчет длинных трубопроводов

Трубопроводный транспорт для перемещения различных жидких, газообразных, твердых продуктов и их смесей широко используется в различных отраслях народного хозяйства.

Сравнительно недавно трубопроводы применялись, главным образом, для перемещения воды, нефти и нефтепродуктов.

Сегодня область применения трубопроводов значительно расширилась: это осушение (дренажные трубы) и орошение (дождевальные машины), медицина (искусственные кровеносные сосуды), теплоэнергетика, пищевые перерабатывающие производства и др.

Транспортировка жидкостей по трубопроводам очень экономична и легко поддается количественной и качественной регулировке.

Наряду с трубопроводами самых незначительных размеров (капилляры), используемыми в лабораторной технике и контрольно-измерительной аппаратуре, применяются трубопроводы диаметром в несколько метров (водоводы гидроэлектростанций) и протяженностью в тысячи километров (магистральные водо- и нефтепроводы).

Все трубопроводы подразделяют на две категории: простые и сложные. *Простой трубопровод* не имеет разветвлений на пути движения жидкости от точки забора до точки потребления (Рисунок 8.1, *a*).

Как правило, такие трубопроводы выполнены из труб одного диаметра, но могут представлять собой последовательное соединение труб разного диаметра с поворотами под любым углом и в любой плоскости [13. 15].

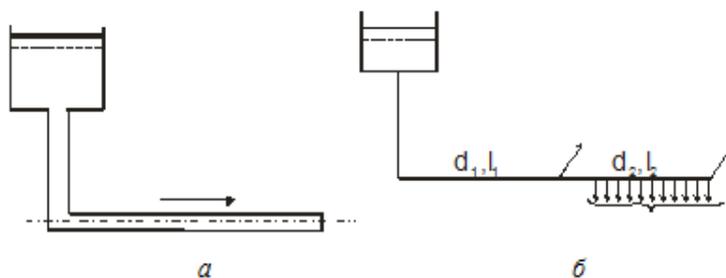


Рисунок 1.8.1. – Трубопровод:

*a* – простой; *б* – сложный

*Сложный трубопровод* имеет хотя бы одно разветвление или место примыкания труб (Рисунок 1.8.1, б). Как правило, сложный трубопровод состоит из основной (магистральной) трубы и ряда отходящих от нее ответвлений (участков). Отдельные участки труб в целях рационального распределения жидкости по потребителям могут объединяться в сети.

В зависимости от величины потерь напора различают гидравлически короткие и гидравлически длинные трубопроводы, причем их проектирование и расчет имеют существенные различия.

Короткими считают трубопроводы небольшой длины, имеющие, как правило, большое количество местных сопротивлений, в которых местные потери составляют примерно 5 ... 10 % потерь напора на трение по длине (Рисунок 8.2). В длинных трубопроводах, наоборот, потери напора на местные сопротивления настолько малы по сравнению с потерями по длине, что их либо не учитывают, либо принимают по эквивалентной длине.

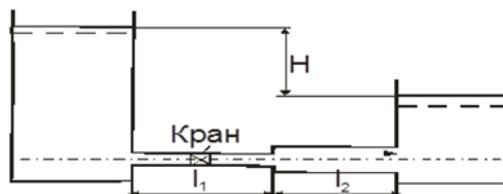


Рисунок 1.8.2. – Короткий трубопровод

При гидравлическом расчете трубопроводов используют следующие основные расчетные зависимости: уравнение Бернулли, уравнение постоянства расхода, уравнение Дарси – Вейсбаха, которое можно преобразовать в одно из следующих выражений:

уравнение Шези

$$V = C \sqrt{R \frac{h_w}{l}} = C \sqrt{RI}, \quad (1.8.1)$$

где  $C$  – коэффициент Шези, зависящий от шероховатости и гидравлического радиуса трубопровода;

уравнение расхода жидкости

$$V = vF = CF \sqrt{RI} = K \sqrt{I} = K \sqrt{h_w/l}, \quad (1.8.2)$$

где  $K$  – расходная характеристика или модуль расходотрубопровода, представляющая величину расхода жидкости в трубопроводе при гидравлическом уклоне  $I=1$

$$K = CF \sqrt{R} = \sqrt{\frac{g \pi^2 d^5}{8 \lambda}}. \quad (1.8.3)$$

Значения расходных характеристик, вычисленных по формуле (1.8.3) для всех видов труб, выпускаемых промышленностью, сведены в специальные таблицы, называемые таблицами Шевелева [14].

Вводя понятие располагаемого напора и объединив все потери, получаем другой вид расчетного уравнения Бернулли:

$$H = \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} + \sum h_w, \quad (1.8.4)$$

где  $H = \left( z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left( z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right)$  – располагаемый напор трубопровода;

$\sum h_w$  – суммарные потери напора в трубопроводе.

Если площади сечений питателя и приемника трубопровода достаточно велики по сравнению с сечением трубопровода (например, при подаче воды

из водоема в резервуар), то скоростными напорами в этих сечениях пренебрегают, и тогда уравнение (8.4) упрощается:

$$H = \sum h_w. \quad (1.8.5)$$

Из уравнения (8.5) следует, что весь располагаемый напор тратится на преодоление гидравлических сопротивлений. Это уравнение применимо независимо от размеров питателя и приемника, если трубопровод имеет большую длину, а скоростные напоры на входе и выходе оказываются пренебрежительно малыми по сравнению с потерями напора на трение по его длине.

При этом могут иметь место два случая: истечение жидкости под уровень и в атмосферу (Рисунок 1.8.3).

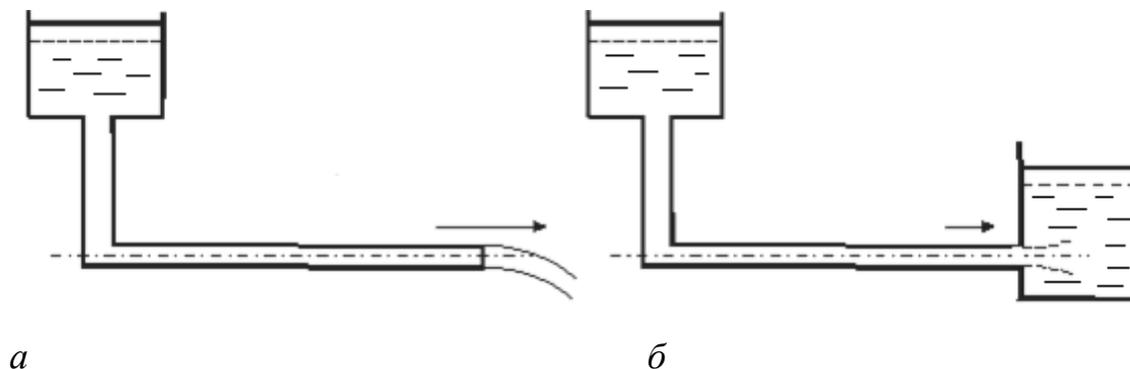


Рисунок 1.8.3. – Истечение жидкости:

а) свободное; б) затопленное

При истечении под уровень уравнение Бернулли приводится к виду

$$H = \left(1 + \frac{\lambda l}{d} + \sum \zeta\right) \frac{v^2}{2g}, \quad (1.8.6)$$

а при истечении в атмосферу –

$$H = \left(\frac{\lambda l}{d} + \sum \zeta + 1\right) \frac{v^2}{2g}, \quad (1.8.7)$$

Из сравнения уравнений (8.6) и (8.7), видно, что они тождественны. Однако, необходимо помнить, что при истечении под уровень единица, стоящая в скобках, представляет собой коэффициент местных потерь на выходе

потока под уровень, а в случае истечения в атмосферу она учитывает кинетическую энергию, оставшуюся в потоке при выходе из трубопровода.

Таким образом, для простого трубопровода длиной  $l$  и постоянным диаметром  $d$  при турбулентном режиме уравнение Бернулли принимает вид:

$$H = \frac{V^2}{2g} \left( 1 + \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta \right) = \frac{16V^2}{\pi^2 d^4 2g} \left( 1 + \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta \right). \quad (1.8.8)$$

Коэффициенты сопротивления трения  $\lambda$  и местных сопротивлений  $\zeta$  выбирают, исходя из зависимостей, рассмотренных выше. При этом могут быть использованы значения коэффициентов, полученные аналитическим, графическим способами или на основе табличных данных.

Подставив в формулу (1.8.8) значения постоянных величин и вычислив числовой множитель, получим новый вид расчетного уравнения:

$$H = 0,0827 \frac{V^2}{d^4} \left( 1 + \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta \right). \quad (1.8.9)$$

Гидравлический расчет простых трубопроводов обычно сводится к определению одного из трех значений при заданных других:

- напора  $H$  при известных расходе  $V$  жидкости, диаметре  $d$  и длине трубопровода  $l$ ;
- расхода  $V$  жидкости при известных диаметре  $d$ , длине  $l$  трубопровода и напоре  $H$ ;
- диаметра  $d$  трубопровода при заданных расходе  $V$  жидкости и напоре  $H$ .

При расчете трубопроводов используют два метода:

- 1) полный, учитывающий все сопротивления трубопровода;
- 2) сокращенный, с использованием расходных характеристик и поправочных коэффициентов на местные сопротивления.

Рассмотрим основные варианты расчета простого трубопровода полным методом.

**Задача 1.** Дано: длина  $l$  трубопровода, диаметр  $d$ , геодезические отмет-

ки в начальном  $z_1$  и конечном  $z_2$  пунктах и расход  $V$ . Требуется определить напор  $H$ , необходимый для подачи заданного расхода из начального пункта в конечный.

Для полного расчета используем уравнение:

$$H = \frac{8V^2}{\pi^2 d^4 g} \left( 1 + \frac{\lambda l}{d} + \sum \zeta \right). \quad (1.8.10)$$

Коэффициенты  $\lambda$  и  $\zeta$  находим с учетом режима движения жидкости, определяемого числом Рейнольдса  $Re = \frac{4V}{\pi d \nu}$ , а также в зависимости от шероховатости  $\Delta$  труб.

**Задача 2.** Дано: длина  $l$  трубопровода, диаметр  $d$ , напор насоса  $H$ , геодезические отметки в начальном  $z_1$  и конечном  $z_2$  пунктах. Требуется определить расход  $V$ .

Расход вычисляется по уравнению

$$V = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2gH}{1 + \lambda l/d + \sum \zeta}}. \quad (1.8.11)$$

Прямое вычисление расхода здесь выполнить невозможно, так как коэффициенты  $\lambda$  и  $\zeta$  являются функциями числа Рейнольдса, а оно оказывается неопределимым в условиях данной задачи потому, что само связано с неизвестным и искомым расходом  $V$ . Поэтому решение находят методом последовательных приближений, полагая в первом приближении, что имеет место квадратичный закон сопротивления, при котором коэффициенты  $\lambda$  и  $\zeta$  не зависят от  $Re$ .

**Задача 3.** Дано: напор насоса  $H$ , расход  $V$ , длина  $l$  трубопровода, отметки геодезических высот  $z_1$  и  $z_2$ . Требуется определить диаметр  $d$  трубопровода.

Решение задачи аналитическим путем связано со значительными трудностями, так как в этом случае не только неизвестно число  $Re$ , куда входит значение диаметра, но и само уравнение по отношению к искомому диаметру

оказывается уравнением высоких степеней, не приводимых к логарифмическому виду. В связи с этим задачу решают методом последовательного приближения. В первом приближении полагают, что имеет место квадратичный закон сопротивлений, при котором коэффициент является функцией диаметра. Тогда уравнение можно привести к следующему виду:

$$V = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2gH}{1 + \lambda l/d + \sum \zeta}} = f(d),$$

где  $\lambda = f_1(d)$ .

Задаваясь при постоянном напоре  $H$  рядом значений диаметра  $d_1-d_3$  и т. д., можно вычислить ряд соответствующих значений расхода  $V_1, V_2, V_3$  и т. д. и построить график  $V = f(d)$ . По графику можно определить диаметр трубопровода, отвечающий заданному расходу  $V$ .

**Задача 4.** Дано: длины участков трубопровода  $l_1 \dots l_3$  и их диаметры  $d_1 \dots d_3$ , расход  $V$ . Трубы соединены последовательно.

Уравнение Бернулли для данного случая можно записать в следующем виде:

$$z_1 - z_2 = H = h_{w1} + h_{w2} + h_{w3},$$

где  $h_{w1}, h_{w2}, h_{w3}$  — потери напора на первом, втором и третьем участках.

Потери напора на первом участке будут равны:

$$h_{w1} = \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \frac{V_1^2}{2g} + \sum \zeta_1 \frac{V_1^2}{2g} = \left( \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} + \sum \zeta_1 \right) \frac{8V^2}{g\pi^2 d_1^4}.$$

Аналогично можно выразить потери напора на остальных участках. Подставив выражения для определения потерь на каждом участке и просуммировав их, получим

$$H = \frac{8V^2}{g\pi^2} \left[ \left( \lambda_1 \frac{l_1}{d_1^5} + \lambda_2 \frac{l_2}{d_2^5} + \lambda_3 \frac{l_3}{d_3^5} \right) + (\sum \zeta_1 + \sum \zeta_2 + \sum \zeta_3) \right] \quad (1.8.12)$$

Таким образом, при последовательном соединении труб разных диаметров необходимо суммировать потери напора на его отдельных участках.

Полученное уравнение показывает, что решения первой и второй задач для трубопровода переменного сечения будут такими же, как для трубопровода постоянного сечения.

Третья задача, если в ней требуется определить каждый диаметр, становится неопределенной, так как каждое уравнение содержит число неизвестных, равное числу участков. Чтобы решить эту задачу, нужно задать диаметры труб для всех участков, кроме одного, или использовать графический метод решения.

При расчете сокращенным методом с использованием расходных характеристик, могут иметь место следующие основные схемы расчета.

Длинный трубопровод с последовательным соединением труб.

При последовательном соединении труб разного диаметра каждый участок имеет длину  $l_i$  и диаметр  $d_i$ . При этом весь напор  $H$  будет затрачен на преодоление сопротивлений по длине. На каждом участке с  $d_i = \text{const}$  будет потеряна некоторая часть  $H_i$  полного напора  $H$ , равная

$$H_i = \frac{V^2}{K_i^2} l_i. \quad (1.8.13)$$

Величина  $1/K^2 = A$  называется удельным сопротивлением трубопровода, тогда потерю напора на участке можно определить также по зависимости

$$H_i = A_i V^2 l_i.$$

Полная потеря напора в трубопроводе будет равна сумме потерь напора на отдельных участках

$$H = H_1 + H_2 + H_3 + \dots + H_n = \sum_{i=1}^n H_i,$$

или, подставляя  $H_i$ , получим

$$H = \frac{V^2}{K_1^2} l_1 + \frac{V^2}{K_2^2} l_2 + \frac{V^2}{K_3^2} l_3 + \dots + \frac{V^2}{K_n^2} l_n = V^2 \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{K_i^2}. \quad (1.8.14)$$

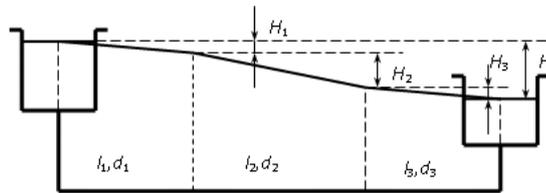


Рисунок 1.8.4 –Последовательное соединение труб

Если необходимо определить расход  $V$  при заданном  $H$ , то

$$V = \sqrt{\frac{H}{\sum_{i=1}^n \frac{l_i}{K_i^2}}} \quad (1.8.15)$$

Длинный трубопровод с параллельным соединением труб

Рассмотрим параллельное соединение труб. Длина  $l_i$  и диаметр  $d_i$  каждой ветви заданы. В узел А поступает расход  $V$  и разделяется на  $n$  в общем случае неравных частей  $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ .

Обозначим напор в узле А через  $H_A$ , а в узле В, где все ветви соединяются через  $H_B$ . Тогда, потери напора в каждой из линий будут одинаковы и равны разности напоров в узлах А и В. Обозначим эти потери через  $H$ . Имеем

$$H = H_1 = H_2 = H_3 = \dots = H_n = H_A - H_B.$$

Расход через любую из этих линий может быть записан в виде

$$V_i = K_i \sqrt{\frac{H}{l_i}}$$

С другой стороны, сумма расходов во всех параллельных трубопроводах равна расходу до разветвления, то есть

$$V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n = \sum_{i=1}^n V_i = V.$$

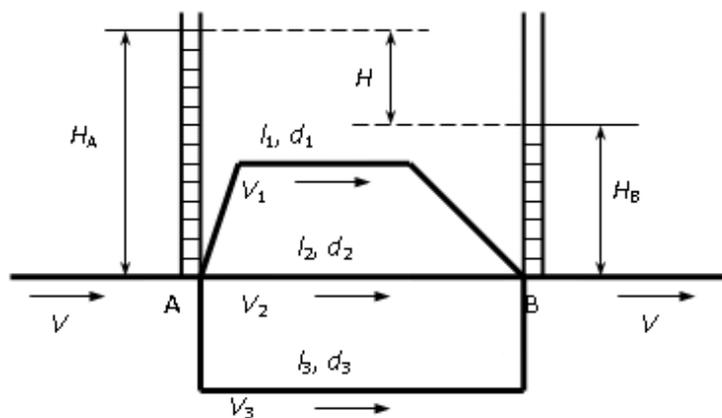


Рисунок 1.8.5 – Параллельное соединение труб

Тогда

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = K_1 \sqrt{\frac{H}{l_1}} + K_2 \sqrt{\frac{H}{l_2}} + K_3 \sqrt{\frac{H}{l_3}} + \dots + K_n \sqrt{\frac{H}{l_n}} = \sqrt{H} \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{\sqrt{l_i}}. \quad (1.8.16)$$

Или

$$H = \frac{V^2}{\left( \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{\sqrt{l_i}} \right)^2}. \quad (1.8.17)$$

Из этой зависимости при заданных: общем расходе  $V$ , диаметрах  $d_i$  и длинах ветвей  $l_i$  можно найти напор  $H$ , а затем расходы  $V_i$  в каждой из ветвей.

### 3. Длинный трубопровод с непрерывной (путевой) раздачей.

В рассмотренных выше случаях (1, 2) расход  $V$  подавался в начале трубопровода и проходил до его конца транзитом. На практике водозабор может осуществляться и по длине трубопровода (например, близко расположенные отводы от магистрального трубопровода, идущего вдоль улицы населенного пункта, в дома; отводы от поливного трубопровода в борозды и т.д.). В этом случае вышеприведенные формулы в том виде как они даны не могут применяться для расчета таких трубопроводов.

Расход  $V_n$  равномерно распределяемый по пути называют расходом не-

прерывной раздачи (путевым расходом).

В общем случае расход в трубопроводе может состоять из транзитного расхода  $V_{\text{тр}}$  и расхода непрерывной раздачи (Рисунок 8.6), тогда потери в трубопроводе

$$H = \frac{\left( V_{\text{тр}}^2 + V_{\text{тр}} V_{\text{п}} + \frac{1}{3} V_{\text{п}}^2 \right) l}{K^2}. \quad (1.8.18)$$

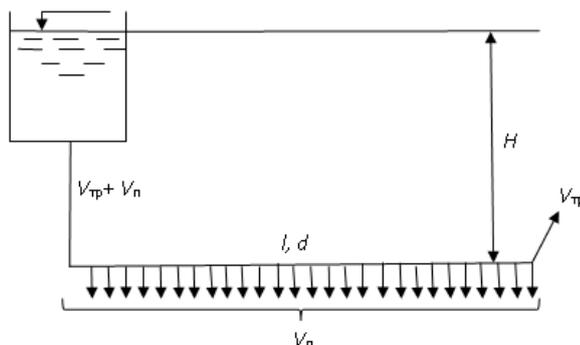


Рисунок 8.6 – Трубопровод с непрерывной раздачей расхода

В частном случае при наличии только расхода непрерывной раздачи ( $V_{\text{тр}} = 0$ )

$$H = \frac{1}{3} \frac{V_{\text{п}}^2 l}{K^2}. \quad (1.8.19)$$

Сравнивая выражение (8.19) с (8.13) можно сделать вывод, что при непрерывной раздаче требуется напор в три раза меньше, чем при транзитном пропуске того же расхода.

Принимая приближенно

$$V_{\text{тр}}^2 + V_{\text{тр}} V_{\text{п}} + \frac{1}{3} V_{\text{п}}^2 \approx \left( V_{\text{тр}} + 0,55 V_{\text{п}} \right)^2, \quad (1.8.20)$$

и вводя понятие о расчетном расходе

$$V_{\text{р}} = V_{\text{тр}} + 0,55 V_{\text{п}}, \quad (1.8.21)$$

получим формулу

$$H = \frac{V_{\text{р}}^2 l}{K^2}. \quad (1.8.22)$$

Формула (8.22) справедлива для любого типа распределения расхода – транзитного, с непрерывной раздачей или смешанного.

Путевой расход (непрерывная раздача) на участке определяется как

$$V_{\text{п}} = ql, \quad (1.8.23)$$

где  $q$  – удельный путевой расход на 1 м длины трубопровода;  $l$  – длина участка трубопровода.

Значения расходных характеристик и удельных сопротивлений для некоторых видов труб в квадратичной области сопротивления приведены в табл. П.3, П.4, П.6 Приложения.

### **Контрольные вопросы**

1. Чем отличаются простые трубопроводы от сложных?
2. Назовите основные различия между короткими трубопроводами и длинными.
3. Приведите формулу Шези.
4. Что представляет собой расходная характеристика?
5. От каких факторов зависит коэффициент Шези?
6. Как определяются потери напора при последовательном соединении длинного трубопровода?
7. Что такое транзитный расход и непрерывная раздача расхода?
8. Как определить потери напора в случае длинного трубопровода с параллельным соединением труб?
9. Назовите два метода расчета трубопроводов. В чем состоит их отличие?
10. Как определяются потери напора в трубопроводах с непрерывной раздачей?

## Материалы практических занятий

*Задача 1.8.1.* Определить расход через трубопровод при следующих данных  $H = 6$  м,  $l = 1225$  м,  $d = 200$  мм, трубы нормальные.

*Решение.*

Находим по табл. П. 3 приложения для нормальных труб диаметром  $d=200$  мм значение  $K = 340,8$  л/с.

Определяем расход по зависимости

$$V = K \sqrt{\frac{H}{l}} = 340,8 \sqrt{\frac{6}{1225}} = 23,85 \text{ л/с.}$$

*Задача 1.8.2.* Определить напор, необходимый для пропуска расхода  $V = 60$  л/с через трубопровод, состоящий из трех участков последовательно соединенных труб с размерами  $l_1 = 300$  м,  $d_1 = 250$  мм,  $l_2 = 350$  м,  $d_2 = 150$  мм,  $l_3 = 380$  м,  $d_3 = 200$  мм. Трубы нормальные (бывшие в эксплуатации).

*Решение.*

По табл. П. 3 приложения для нормальных труб определяем расходные характеристики

При  $d_1 = 250$  мм  $K_1 = 616,4$  л/с;  $d_2 = 150$  мм  $K_2 = 158,4$  л/с;  $d_3 = 200$  мм  $K_3 = 340,8$  л/с.

Вычисляем напор

$$H = V^2 \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{K_i^2} = 0,06^2 \left( \frac{300}{0,6164^2} + \frac{350}{0,1584^2} + \frac{380}{0,3408^2} \right) = 64,84 \text{ м.}$$

*Задача 1.8.3.* Жидкость с расходом  $V = 68$  л/с протекает по трубопроводу из трех параллельно соединенных труб. Найти расходы по отдельным линиям и потерю напора  $H$  между отдельными узловыми точками, если  $l_1 = 600$  м,  $d_1 = 150$  мм,  $l_2 = 420$  м,  $d_2 = 150$  мм,  $l_3 = 980$  м,  $d_3 = 200$  мм. Трубы нормаль-

ные.

*Решение.*

По табл. П.3 приложения для нормальных труб определяем расходные характеристики: при  $d_1 = d_2 = 150$  мм  $K_1 = K_2 = 158,4$  л/с, при  $d_3 = 200$  мм  $K_3 = 340,8$  л/с.

Определяем потерю напора между узловыми точками

$$H = \frac{V^2}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{K_i}{\sqrt{l_i}}\right)^2} = \frac{0,068^2}{\left(\frac{0,1584}{\sqrt{600}} + \frac{0,1584}{\sqrt{420}} + \frac{0,3408}{\sqrt{980}}\right)^2} = 7,35 \text{ м.}$$

Определяем расходы по каждой трубе

$$V_1 = K_1 \sqrt{\frac{H}{l_1}} = 158,4 \sqrt{\frac{7,35}{600}} = 17,53 \text{ л/с;}$$

$$V_2 = K_2 \sqrt{\frac{H}{l_2}} = 158,4 \sqrt{\frac{7,35}{420}} = 20,95 \text{ л/с;}$$

$$V_3 = K_3 \sqrt{\frac{H}{l_3}} = 340,8 \sqrt{\frac{7,35}{980}} = 29,51 \text{ л/с.}$$

*Задача 1.8.4.* Через систему труб, состоящую из трех последовательно соединенных участков вода подается от напорного бака А к потребителям. На участках АВ и ВС вода разбирается в виде непрерывной раздачи. По трубе СД идет до конца транзитный расход  $V_D$ . Размеры труб и расходы показаны на Рисунок 1.8.7. Трубы нормальные. Определить потери напора от напорного бака до узла D.

*Решение.*

Потери напора

$$H = H_{AB} + H_{BC} + H_{CD}.$$

Потери напора на участке АВ определяем по формуле (8.22) при расчетном расходе на этом участке

$$V_{AB} = V_p = V_{тр} + 0,55V_{п1},$$

где транзитный расход  $V_{тр} = V_D + V_{п2} = 12 + 18 = 30$  л/с.

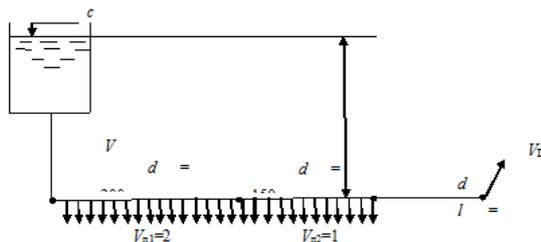


Рисунок 1.8.7. – Расчетная схема к задаче 1.8.4

Тогда

$$V_{AB} = V_p = 30 + 0,55 \cdot 22 = 42,1 \text{ л/с.}$$

$$H_{AB} = \frac{V_{AB}^2}{K_{AB}^2} l_{AB} = \frac{42,1^2}{340,8^2} \cdot 420 = 6,41 \text{ м.}$$

Расходную характеристику  $K_{AB}$  определяем по табл. П.3 при  $d_{AB} = 200$  мм  $K_{AB} = 340,8$  л/с.

Расчетный расход на участке BC

$$V_{BC} = V_p' = V_{тр}' + 0,55V_{п2} = 12 + 0,55 \cdot 18 = 21,9 \text{ л/с,}$$

где  $V_{тр}' = V_D = 12$  л/с.

Потери напора на участке BC

$$H_{BC} = \frac{V_{BC}^2}{K_{BC}^2} l_{BC} = \frac{21,9^2}{158,4^2} \cdot 380 = 7,26 \text{ м.}$$

Расходная характеристика  $K_{AB}$  определена по табл. П.3 при  $d_{BC} = 150$  мм

$$K_{AB} = 158,4 \text{ л/с.}$$

Расчетный расход на участке CD  $V_{CD} = V_D = 12$  л/с, так как непрерывная раздача отсутствует.

Потери напора на участке CD:

$$H_{CD} = \frac{V_{CD}^2}{K_{CD}^2} l_{CD} = \frac{12^2}{53,61^2} \cdot 250 = 12,53 \text{ м.}$$

Суммарные потери напора по всему трубопроводу

$$H = 6,41 + 7,26 + 12,53 = 26,2 \text{ м.}$$

**Решить самостоятельно задачи.**

*Задача 1.8.5.* Определить напор, необходимый для пропуска расхода  $V = 26,3$  л/с по трубопроводу, состоящему из трех участков с размерами  $l_1 = 350$  м,  $d_1 = 250$  мм,  $l_2 = 750$  м,  $d_2 = 200$  мм,  $l_3 = 500$  м,  $d_3 = 150$  мм. Трубы нормальные.

*Задача 1.8.6.* Определить напор, необходимый для пропуска расхода  $V = 1,25$  м<sup>3</sup>/с по трубопроводу, состоящему из трех участков железобетонных, вибропрессованных напорных труб с размерами  $l_1 = 1225$  м,  $d_1 = 250$  мм,  $l_2 = 898$  м,  $d_2 = 1000$  мм,  $l_3 = 1829$  м,  $d_3 = 1200$  мм.

*Задача 1.8.7.* Найти распределение общего расхода  $V = 80$  л/с по отдельным линиям  $V_1, V_2, V_3$  и потерю напора между узловыми точками при параллельном соединении труб при следующих исходных данных  $l_1 = 500$  м,  $d_1 = 150$  мм,  $l_2 = 350$  м,  $d_2 = 150$  мм,  $l_3 = 1000$  м,  $d_3 = 200$  мм. Трубы нормальные.

*Задача 1.8.8.* Найти распределение общего расхода  $V = 85$  л/с по отдельным линиям  $V_1, V_2, V_3$  и потерю напора  $H$  между узловыми точками при параллельном соединении асбестоцементных труб (класс ВТ 12, тип I) при следующих исходных данных: диаметр условного прохода  $d_1 = 150$  мм (внутренний расчетный диаметр  $d_{p1} = 135$  мм),  $l_1 = 480$  м,  $d_2 = 200$  мм ( $d_{p2} = 181$  мм),  $l_2 = 825$  м,  $d_3 = 250$  мм ( $d_{p3} = 228$  мм),  $l_3 = 380$  м.

*Задача 1.8.9.* Расход  $V_{\text{п}} = 15$  л/с распределяется в виде непрерывной раздачи по пути на участке трубопровода ВС (Рисунок 8.8). Диаметр  $d = 150$  мм постоянный по всей длине трубопровода ABC. Длина участков  $l_{\text{AB}} = 600$  м,  $l_{\text{BC}} = 400$  м. Трубы нормальные. Определить потери напора от напорного бака А до точки С.

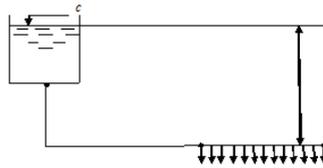


Рисунок 1.8.8. – Расчетная схема к задаче 8.9

*Задача 1.8.10.* По трубопроводу диаметром 200 мм и длиной 350 м проходит транзитный расход и разбирается непрерывный расход с удельным путевым расходом 0,02 л/с·м. Определить, чему равен транзитный расход, если потери напора составляют 30 м.

### 1.9 Гидравлический удар в трубопроводах

*Гидравлическим ударом* называют резкое повышение и понижение давления в трубопроводе, вызванное изменением скорости течения движущейся в нем жидкости. Причиной такого изменения скорости могут быть быстрое закрытие задвижки на трубопроводе, внезапная остановка насоса или турбины, различные аварии и т. д. Особенно опасен гидравлический удар в длинных магистральных трубопроводах, в которых огромные массы жидкости движутся с большими скоростями. В этом случае в результате резкого повышения давления в трубопроводе могут произойти повреждения мест соединения труб (стыков, фланцев, переходов), разрыв стенок трубопровода, поломка насоса и т. п.

Гидравлический удар следует рассматривать как частный случай неустановившегося движения жидкости [7, 10]. Теорию гидравлического удара разработал Н. Е. Жуковский в 1898 г. Он установил, что гидравлический удар в трубе является быстропотекающим периодическим процессом, который сопровождается упругими деформациями жидкости и стенок трубы.

Рассмотрим горизонтальный трубопровод длиной  $l$  постоянного диа-

метра  $d$ , по которому движется жидкость с некоторой средней скоростью  $v_0$  при гидродинамическом давлении  $p_0$  (Рисунок 1.9.1). Если быстро закрыть задвижку  $D$ , установленную на трубопроводе, то слой жидкости, находящейся в этот момент непосредственно около задвижки, также остановится. На участке трубопровода рядом с задвижкой образуется зона повышенного давления  $\Delta p$ . Вследствие перехода кинетической энергии в потенциальную давление в этой зоне возрастет на значение  $p_{уд}$  и совершит работу по сжатию жидкости и растяжению стенок трубы (Рисунок 1.9.1).

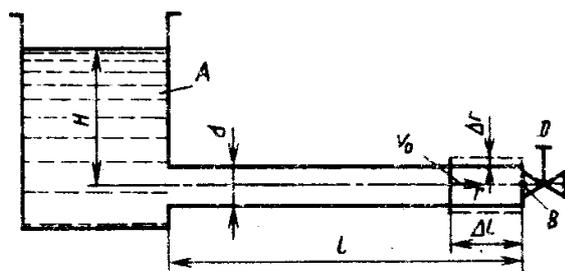


Рисунок 1.9.1— Схема возникновения гидравлического удара

Поскольку реальная жидкость сжимается, то мгновенной остановки всей массы жидкости в трубопроводе не произойдет, а область повышенного давления будет перемещаться навстречу потоку с некоторой скоростью  $c$ , называемой скоростью распространения ударной волны, и достигнет начала трубы за время  $t = l/c$  после закрытия задвижки. Но такое состояние не будет равновесным, и под действием давления  $p_{уд}$  часть жидкости устремится из трубы в резервуар, и через время  $2l/c$  во всем трубопроводе восстановится первоначальное давление  $p_0$ . Однако движение жидкости в сторону резервуара не прекратится, и в направлении от задвижки к резервуару начнет распространяться новая волна, понижающая давление в трубопроводе на величину  $-p_{уд}$ .

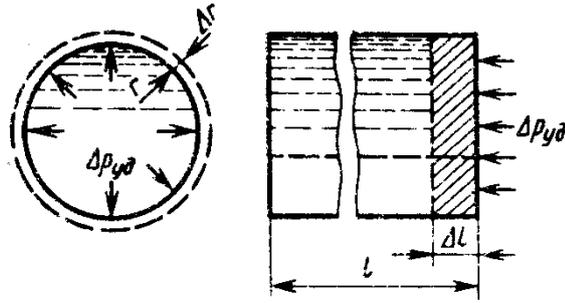


Рисунок 1.9.2.— К расчету ударного давления

Через время  $3l/c$  волна достигнет резервуара, оставляя за собой сжавшиеся стенки трубы и расширяющуюся жидкость. В этом случае кинетическая энергия жидкости вновь совершит работу деформации, но противоположного знака. Состояние трубы и жидкости в этой фазе также не будет равновесным, и поэтому ударная волна, отразившись от резервуара, будет вновь перемещаться в сторону задвижки. За время  $4l/c$  будет восстановлено первоначальное положение.

Время  $4l/c$  называется *периодом гидравлического удара*. Очевидно, что этот период состоит из двух фаз. В течение первой фазы  $2l/c$  давление у задвижки будет больше первоначального на величину  $p_{уд}$ , в течение второй фазы  $2l/c$  — давление меньше первоначального на  $p_{уд}$ . В своих опытах Н. Е. Жуковский наблюдал до 12 полных периодов с постепенным уменьшением  $p_{уд}$  вследствие трения и потери энергии в резервуаре.

Он установил, что кинетическая энергия потока  $E_k$  расходуется на работу  $A_1$ , которая затрачивается на расширение стенок трубы, и на работу  $A_2$  сжатия жидкости, т. е.

$$E_k = A_1 + A_2.$$

Кинетическую энергию потока можно выразить следующей формулой:

$$E_k = \frac{mv_0^2}{2} = \rho \frac{L\pi d^2}{4} \frac{v_0^2}{2} = \rho\pi r^2 L \frac{v_0^2}{2}. \quad (1.9.1)$$

Приравняв данное выражение к сумме работы по расширению стенок трубы, и работы, затраченной на сжатие жидкости, Н. Е. Жуковский вывел уравнение для определения ударного давления  $p_{уд}$  и скорости  $c$  распространения ударной волны:

$$p_{уд.} = \sqrt{\frac{\rho v_0^2}{2\left(\frac{r}{E_{тр.}\delta} + \frac{1}{2E_{ж.}}\right)}} = \sqrt{\frac{\rho^2 v_0^2}{\rho\left(\frac{2r}{E_{тр.}\delta} + \frac{1}{E_{ж.}}\right)}}, \quad (1.9.2)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\frac{2r\rho}{E_{тр.}\delta} + \frac{\rho}{E_{ж.}}}} = \frac{\sqrt{\frac{E_{ж.}}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{dE_{ж.}}{\delta E_{тр.}}}}, \quad (1.9.3)$$

где  $E_{тр.}$  – модуль упругости стенки трубы;  $E_{ж.}$  – модуль объемной упругости жидкости;  $\delta$  – толщина стенки трубы.

Значения модулей упругости и модулей объемной упругости для некоторых материалов труб и некоторых жидкостей приведены в табл. П.7.

Скорость распространения ударной волны  $c$  измеряется в единицах скорости. Физический смысл скорости ударной волны можно понять, если принять, что стенка трубы абсолютно жесткая, т. е.  $E = \infty$ . Тогда получим известное из физики выражение, определяющее скорость распространения звука в жидкой среде:

$$c' = \sqrt{\frac{E_{ж.}}{\rho}}. \quad (1.9.4)$$

Формула для определения ударного давления справедлива при так называемом мгновенном закрытии задвижки, когда время закрытия  $T_3$  меньше фазы гидравлического удара  $T_3 < \tau = 2l/c$ . Если увеличивать значение  $T_3$  и закрывать задвижку постепенно, то при  $T_3 > 2l/c$  будет иметь место неполный гидравлический удар, т. е. ударная волна, отразившись от резервуара, возвратится обратно к задвижке раньше, чем она будет закрыта, и полного повышения давления в этом случае не произойдет. Частичное повышение давления

$p_{уд}'$  можно определить из соотношения

$$p_{уд}' = p_{уд} \frac{\tau}{T_3}. \quad (1.9.5)$$

Подставив в выражение значение  $p_{уд}$  по формуле Жуковского и  $\tau = 2l/c$ , получим другую формулу для определения частичного повышения давления за счет ударной волны:

$$p_{уд} = \frac{2\rho l v_0}{T_3}. \quad (1.9.6)$$

Таким образом, для ослабления гидравлического удара следует увеличивать время закрытия задвижки на трубопроводе.

При резком закрытии задвижки гидравлический удар начинается с волны повышенного давления. Такой удар называется *положительным*. При резком открытии задвижки, удар начинается с волны пониженного давления. Такой удар называется *отрицательным*.

Если давление в трубопроводе понизится до давления (упругости) насыщенных паров жидкости при данной температуре, то начнется процесс кавитации - «холодного кипения», образуются пары жидкости. При резком уменьшении давления могут образоваться полости, заполненные смесью пара и воздуха (при достаточно низком давлении), т. е. произойдет разрыв сплошности потока. Так как движение жидкости в трубопроводе не остановилось, то при возникновении отраженных волн, с изменением направления массы жидкости устремляются к месту разрыва сплошности потока. При быстром сжатии полости с пониженным давлением происходит соударение масс (колонн) жидкости. Повышение давления при этом превышает  $p_{уд}$ , найденное по формуле Жуковского.

Гидравлический удар с разрывом сплошности потока может произойти при внезапной остановке насоса. Подача воды насосом прекращается, а движение воды по инерции по трубопроводу еще происходит. При этом в потоке могут возникнуть разрывы сплошности.

Наиболее опасными с точки зрения возникновения разрыва сплошности являются места непосредственно у насосной станции (у насосов) и места переломов трассы с выпуклостью на продольном профиле, обращенной вверх.

Основными способами борьбы с гидравлическим ударом при возникновении разрыва сплошности потока являются следующие.

1. Сброс части жидкости из трубопровода при повышении давления, если такой сброс возможен по соображениям охраны окружающей среды.

Воду сбрасывают в какие-либо понижения местности, в водоемы или обратно в источник водоснабжения. В последнем случае вода может быть пропущена через насос и всасывающую линию, если на напорном (нагнетательном) трубопроводе нет обратного клапана; через обводные линии (байпасы) в обход обратного клапана и насоса, через медленно закрывающиеся обратные клапаны.

К этим мерам защиты относится и сброс воды через специальные предохранительные клапаны или другие устройства (например, разрывные мембраны). При превышении давления клапаны, рассчитанные на определенное давление, открываются и давление понижается. Разрывные мембраны, изготовленные из тонкого листа металла, устанавливаются на отводе от основного трубопровода. Мембрана полностью перекрывает поперечное сечение отвода. При превышении определенного давления мембрана разрушается и часть жидкости выливается. После сброса жидкости клапаны должны автоматически закрываться.

2. Впуск и заземление воздуха. Если возможно образование разрыва сплошности потока, то эффективным средством борьбы с чрезмерным повышением давления здесь может служить впуск воздуха в места образования разрыва сплошности и последующее заземление воздуха. Для впуска и заземления воздуха служат специальные устройства-клапаны. Заземленный в местах разрыва сплошности потока воздух не позволяет разошедшимся ко-

лоннам воды при обратном движении соударяться, ибо такое соударение вызвало бы очень сильное повышение давления. Воздух после гашения гидравлического удара должен быть удален из трубопровода, причем это удаление должно выполняться так, чтобы не возникли в трубопроводе нежелательные колебания давления.

3. Впуск воды в трубопровод из бассейнов, которые отделены от защищаемых трубопроводов обратными клапанами. При понижении давления в трубопроводе вследствие остановки насосов, на соединительной (бассейн - трубопровод) линии открывается обратный клапан, и вода из бассейна в необходимом количестве поступает в трубопровод. Когда давление начнет подниматься (но не до того большого значения, как это было бы без впуска воды), то обратный клапан закроется и впуск воды в трубопровод прекратится.

Впуск и заземление воздуха и впуск воды целесообразно осуществлять во всех сечениях, где возможен разрыв сплошности потока, или по крайней мере в нескольких, наиболее опасных местах.

4. Воздушно-гидравлические колпаки, которые применяются для гашения гидравлических ударов, возникающих в напорных трубопроводах. Размеры колпаков при установке их на напорных трубопроводах насосных станций, определяются из условий пуска и остановки насосного агрегата.

Применяются также и другие компенсаторы ударного давления – уравнительные резервуары, гидроаккумуляторы и т.д.

### **Контрольные вопросы**

1. Что такое гидравлический удар?
2. Назовите виды гидравлического удара.
3. Приведите формулу Жуковского для определения величины повышения давления при прямом ударе.

4. Как определяется величина повышения давления в случае непрямого удара?
5. Как определить скорость распространения волны гидравлического удара?
6. Что такое фаза и период удара?
7. От каких факторов зависит повышение давления при непрямом ударе? Как можно понизить ударное давление при непрямом ударе?
8. Когда и где может возникнуть гидравлический удар с разрывом сплошности потока?
9. Какие устройства применяют для борьбы с гидравлическим ударом?
10. Какие существуют способы снижения величины повышенного давления при гидравлическом ударе с разрывом сплошности?

### Материалы практических занятий

*Задача 1.9.1.* Длина стального трубопровода от напорного бассейна до задвижки  $l = 1800$  м, диаметр  $d = 450$  мм, толщина стенки трубы  $\delta = 6$  мм. Расход воды в трубопроводе  $V = 127$  л/с.

Определить максимальное повышение давления у задвижки при постепенном ее закрытии за время  $T_3 = 3$  с при линейном изменении скорости.

*Решение*

Определяем скорость установившегося течения воды

$$v_0 = \frac{V}{F} = \frac{4V}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0,127}{3,14 \cdot 0,45^2} = 0,8 \text{ м/с.}$$

Вычисляем скорость распространения волны гидравлического удара

$$c = \frac{\sqrt{E_{жк}/\rho}}{\sqrt{1 + \frac{dE_{жк}}{\delta E_{тр}}}} = \frac{1425}{\sqrt{1 + \frac{450}{6} \cdot 0,01}} = 1077,2 (\text{м/с}),$$

где  $E_{жк}/E_{тр} = 0,01$  – отношение модуля объемной упругости воды к моду-

лю упругости стали (табл. П.7)

Находим фазу удара

$$\tau = \frac{2l}{c} = \frac{2 \cdot 1800}{1077,2} = 3,34 \text{ с.}$$

Так как  $T_3 = 3 \text{ с} < \tau = 3,34 \text{ с}$ , то имеет место прямой гидравлический удар.

Определяем максимальное повышение давления при прямом гидравлическом ударе по формуле Жуковского

$$p_{\text{уд.}} = \rho c v_0 = 1000 \cdot 1077,2 \cdot 0,8 = 861760 \text{ Па} \approx 0,86 \text{ МПа}$$

*Задача 1.9.2.* Определить максимальное повышение давления у задвижки при постепенном ее закрытии за время 5 с (изменение скорости - линейное), если по трубопроводу течет нефть ( $\rho = 900 \text{ кг/м}^3$ ,  $E_{\text{ж}} = 1,324 \cdot 10^9 \text{ кПа}$ ). Длина трубопровода 2 км, диаметр 1 м, толщина стенки трубы 10 мм, расход нефти  $0,5 \text{ м}^3/\text{с}$ .

*Решение*

Определяем скорость установившегося течения нефти

$$v_0 = \frac{V}{F} = \frac{4V}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0,5}{3,14 \cdot 1^2} = 0,64 \text{ м/с.}$$

Вычисляем скорость распространения волны гидравлического удара

$$c = \frac{\sqrt{\frac{E_{\text{ж}}}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{dE_{\text{ж}}}{\rho E_{\text{тр.}}}}} = \frac{\sqrt{1,324 \cdot 10^9 / 900}}{\sqrt{1 + \frac{1000 \cdot 1,324 \cdot 10^9}{10 \cdot 196 \cdot 10^9}}} = \frac{1213}{\sqrt{1 + 0,675}} = 937,1 \text{ м/с,}$$

Вычисляем фазу удара

$$\tau = \frac{2l}{c} = \frac{2 \cdot 2000}{937,1} = 4,3 \text{ с.}$$

Так как  $T_3 = 5 \text{ с} < \tau = 4,3 \text{ с}$ , то имеет место непрямой гидравлический удар.

Определяем максимальное повышение давления у задвижки при не-

прямом гидравлическом ударе

$$p_{\text{уд.}} = \frac{2\rho l v_0}{T_3} = \frac{2 \cdot 900 \cdot 2000 \cdot 0,64}{5} = 460800 \text{ Па} = 0,46 \text{ МПа.}$$

*Задача 1.9.3.* Определить скорость распространения волны гидравлического удара  $c$  и повышение давления  $p_{\text{уд.}}$  при мгновенном закрытии стального трубопровода диаметром  $d=500$  мм с толщиной стенки  $\delta=7$  мм при скорости установившегося движения воды  $v_0=2,5$  м/с.

Построить график изменения давления в сечении трубопровода у задвижки ( $x=0$ ) и в сечении трубопровода на расстоянии от задвижки  $x=0,5l$  при  $l=1000$  м и  $p_0=3$  МПа.

Модуль упругости стали  $E_{\text{тр.}}=196 \cdot 10^6$  кПа.

*Решение.*

Определяем скорость распространения волны гидравлического удара

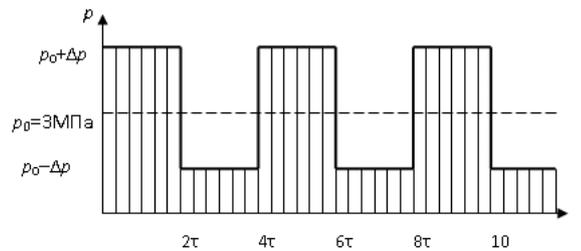
$$c = \frac{\sqrt{\frac{E_{\text{ж}}}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{dE_{\text{ж}}}{\rho E_{\text{тр.}}}}} = \frac{1425}{\sqrt{1 + \frac{500 \cdot 2,03 \cdot 10^6}{7 \cdot 196 \cdot 10^6}}} = 1088,4 \text{ м/с,}$$

где  $\sqrt{E_{\text{ж}}/\rho} = 1425 \frac{\text{м}}{\text{с}}$  – скорость распространения звука в воде;  $E_{\text{ж}} = 2,03 \cdot 10^6$  кПа – модуль объемной упругости воды (табл. П.7).

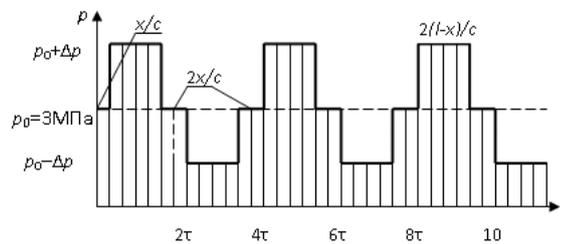
Определяем величину повышения давления при прямом ударе

$$p_{\text{уд.}} = \rho c v_0 = 1000 \cdot 1088,4 \cdot 2,5 = 2720904 \text{ Па} \approx 2,72 \text{ МПа.}$$

Строим графики изменения давления в сечении у задвижки (на расстоянии  $x=0$  (Рисунок 9.3, а)) и в сечении на расстоянии  $x=0,5l$  от задвижки (Рисунок 9.3, б)



а)



б)

Рисунок 1.9.3 – Изменение давления в трубопроводе:

где а) у задвижки ( $x = 0$ ); б) на расстоянии  $x = 0,5l$  от задвижки

**Задача 1.9.4.** Для условий предыдущей задачи найти напряжение в стенках трубопровода при мгновенном закрытии задвижки.

*Решение*

Определяем силу, разрывающую трубопровод

$$P = (p_0 + p_{уд.})dl = (3 + 2,72) \cdot 0,5 \cdot 1000 = 2860 \text{ МН},$$

где  $d \cdot l$  – площадь вертикальной проекции цилиндрической стенки трубопровода.

Вычисляем напряжение в стенках трубопровода

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{P}{2\delta l} = \frac{2860}{2 \cdot 0,007 \cdot 1000} = 204,3 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2} = 204, \text{ МПа},$$

где  $F = 2\delta l$  – площадь сечения, по которому может произойти разрыв стенок трубопровода.

**Решить самостоятельно задачи:**

**Задача 1.9.5.** В стальном трубопроводе длиной  $l = 2000$  м, диаметром  $d$

$= 0,5$  м, с толщиной стенок  $\delta = 6$  мм, средняя по сечению скорость воды  $v = 1,7$  м/с. Определить наименьшее время закрытия задвижки  $T_z$ , обеспечивающее повышение вызванного гидравлическим ударом давления в конце трубопровода не более чем на 2,5 ат. Как повысится давление в случае мгновенного перекрытия сечения трубопровода?

*Задача 1.9.6.* Какова длина трубопровода, по которому течет вода со скоростью 0,7 м/с, если при плавном закрытии задвижки за время 10 с, давление у задвижки поднялось на 0,2 МПа.

*Задача 1.9.7.* С каким расходом двигалась вода в стальном трубопроводе диаметром 0,5 м, с толщиной стенок 6 мм, если после мгновенного закрытия задвижки, давление у нее поднялось на 0,48 МПа?

*Задача 1.9.8.* Построить графики изменения давления в начале (у задвижки  $x = 0$ ) и в конце трубопровода ( $x = l$ ) при мгновенном закрытии задвижки, если по стальному трубопроводу диаметром 300 мм и толщиной стенок 4 мм протекала вода с расходом 150 л/с. Начальное давление в трубопроводе 2,5 МПа.

*Задача 1.9.9.* Определить скорость распространения волны гидравлического удара и повышение давления при мгновенном закрытии чугунного трубопровода диаметром 400 мм с толщиной стенок 12 мм при скорости течения воды 2 м/с (для чугунного трубопровода  $E_{ж}/E_{тр}$  принять по табл. П.7).

*Задача 1.9.10.* Как изменится величина повышенного давления при гидравлическом ударе, если на стальном трубопроводе диаметром 250 мм, длиной 800 м и толщиной стенок 4 мм, по которому течет вода с расходом 80 л/с, сначала закрыть задвижку мгновенно, а затем постепенно в течение 8 с.

## Раздел 2 ГАЗОДИНАМИКА

### 2.1 Одномерные течения газа

В отличие от потоков жидкости газовые течения могут двигаться со значительными скоростями, соизмеримыми со скоростью распространения возмущений. Возмущениями называются отклонения параметров сред от их установившихся значений. Обозначая параметры среды в состоянии равновесия через  $p_0$ ,  $T_0$ ,  $\rho_0$ , а текущие их значения –  $p$ ,  $T$ ,  $\rho$ , имеем возмущения параметров:

$$\Delta p = p - p_0; \Delta T = T - T_0; \Delta \rho = \rho - \rho_0.$$

В зависимости от относительной величины возмущения различают:

- малые (слабые) возмущения

$$\frac{\Delta p}{p_0} \ll 1; \frac{\Delta T}{T_0} \ll 1; \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \ll 1;$$

к малым возмущениям относятся отклонения параметров среды при сжатии (разрежении) в звуковой волне;

- сильные возмущения – отклонения параметров имеют порядок, соизмеримый с их невозмущенными значениями

$$\frac{\Delta p}{p_0} \cong 1; \frac{\Delta T}{T_0} \cong 1; \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \cong 1.$$

Параметры сред претерпевают значительные возмущения в ударных волнах или скачках уплотнения, возникающих при концентрированных энерговыделениях (взрывах, детонационном горении) и при обтекании тел сверхзвуковыми потоками соответственно.

Одинаковые внешние воздействия (изменения условий течения) принципиально различно влияют на параметры потока в зависимости от величины скорости его течения (дозвуковой или сверхзвуковой).

Анализ газовых потоков высокой скорости осуществляется с учетом

сжимаемости среды. Для большинства случаев приемлемой оказывается модель энергетически изолированного течения, соответствующая стационарному течению газа в каналах произвольного сечения.

## 2.2 Распространение малых возмущений в неподвижном газе

Скорость распространения малых возмущений в среде называется скоростью звука. Для определения скорости звука в неподвижной среде рассмотрим движение плоской звуковой волны в трубе постоянного сечения вдоль оси трубы  $x$ . Пусть в момент времени  $t$  фронт звуковой волны находится на расстоянии  $x$  от начала отсчета. За промежуток времени  $dt$  фронт волны продвинется на расстояние  $dx$ , заняв положение  $x + dx$ , т.е. скорость движения волны равна  $c = dx/dt$ .

Рассмотрим объем, ограниченный двумя последовательными положениями плоского фронта волны  $x$  и  $x + dx$  и боковой поверхностью трубы. При прохождении звуковой волны параметры среды испытывают малые возмущения  $dp$ ,  $dT$ ,  $dv$ . Фронт волны отделяет область возмущенной среды от исходной невозмущенной, расположенной перед ним. Подсчитаем изменение количества движения среды в выделенном объеме  $dx$  при прохождении звуковой волны, в которой среда приобретает скорость  $du$ :  $dK = mdu = \rho dVdu = \rho S dx duv$  ( $S$  – поперечное сечение трубы; в расчетах пренебрегаем бесконечно малыми второго порядка малости по сравнению с  $dx$ ,  $dv$ ,  $dt$ ).

Согласно теореме классической механики, изменение количества движения выделенного объема равно импульсу внешних сил, приложенных к нему. В данном случае в качестве равнодействующей внешних сил рассматривается только сила, обусловленная повышением давления в звуковой волне  $dpS$ . Следовательно,

$$mdu = \rho S dx du = dpS dt \quad (2.2.1)$$

Для оценки скорости движения среды в волне возмущения  $du$  восполь-

зуюемся законом сохранения массы. Поскольку при прохождении фронтом волны пути  $dx$  плотность среды возросла на величину возмущения  $d\rho$  масса вещества в объеме  $dV = Sdx$  увеличилась:  $dm = d\rho dV$ . Это увеличение происходит за счет притока  $dQ$  в объем  $dV$  вещества из невозмущенной области через поверхность фронта волны  $S$  со скоростью  $du$  за промежуток времени  $d\tau$ :

$$dQ = p du S d\tau.$$

Поскольку  $dm = dQ$ , имеем

$$d\rho S dx = \rho dv S d\tau. \quad (2.2.2)$$

Рассматривая совместно (10.1) и (10.2), получим с учетом  $c = dx/d\tau$

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}. \quad (2.2.3)$$

Скорость звука физически связана со сжимаемостью среды – его распространение определяется взаимодействием микроструктуры вещества (скоростью обмена импульсом между структурными частицами).

Скорости распространения малых возмущений (скорости звука) в сплошных средах можно рассчитать по формулам

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{1}{\beta \rho} = \frac{E}{\rho}, \quad (2.2.4)$$

$$c = c_s = \sqrt{\frac{k p}{\rho}} = \sqrt{k R T}. \quad (2.2.5)$$

Скорость звука в атмосфере (воздух,  $k = 1.4$ ,  $R = 287 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ )

$$c = \sqrt{1,4 \cdot 287 T} \approx 20 \sqrt{T}. \quad (2.2.6)$$

Таким образом, с подъемом на высоту скорость звука в атмосфере уменьшается вследствие уменьшения температуры, в среднем на один метр в секунду на каждые 250 метров подъема.

Для несжимаемой среды ( $\rho = \text{const}$ ) скорость звука  $c = \infty$ .

Однако реальные среды (жидкости, твердые тела) обладают конечной, хотя и малой, сжимаемостью. Так, для воды ( $E = 20 \cdot 10^8 \text{ Па}$ ,  $\rho = 1000 \text{ кг}/\text{м}^3$ ),  $c$

= 1414 м/с, для стали ( $E = 20 \cdot 10^{10}$  Па,  $\rho = 7,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>),  $c = 5060$  м/с, в то время как для воздуха при нормальных условиях  $c = 340$  м/с.

**Параметры торможения.** Уравнение энергии адиабатно изолированного течения идеального газа

$$h + \frac{v^2}{2} = const$$

позволяет проанализировать закономерности изменения параметров по длине одномерного потока.

Полное торможение потока в условиях энергетической изоляции приведет к преобразованию кинетической энергии в тепловую, сопровождающемуся повышением термодинамических параметров среды.

Параметры заторможенного таким образом потока называются **параметрами торможения**.

Величину температуры торможения можно определить непосредственно из приведенного выше уравнения с учетом соотношения  $h = C_p T$ , где  $C_p$  – теплоемкость при постоянном давлении:

$$T = T_0 + \frac{u^2}{2C_p}. \quad (2.2.7)$$

В гидрогазодинамике обычно выражают теплоемкости при постоянном давлении  $C_p$  и постоянном объеме  $C_v$  через показатель адиабаты  $k$  и газовую постоянную  $R$  с помощью соотношений

$$\frac{C_p}{C_v} = k \text{ – определение показателя адиабаты,}$$

$$C_p - C_v = R \text{ – уравнение Майера.}$$

Решая представленную систему уравнений относительно  $C_p$  и  $C_v$ , получим

$$C_p = \frac{kR}{k-1}, \quad (2.2.8)$$

откуда температура торможения

$$T_0 = T + \frac{k-1}{2} \frac{u^2}{kR}, \quad (2.2.9)$$

или

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2, \quad (2.2.10)$$

где  $M = u/c$  – число Маха, равное отношению скорости потока к местной скорости звука.

Согласно (2.2.9) температура торможения потока воздуха ( $k = 1.4$ ;  $R = 287 \text{ Дж}/[\text{кг} \cdot \text{К}]$ ) определяется выражением

$$T_0 = T + \frac{u^2}{2000}. \quad (2.2.11)$$

Температура торможения всегда больше температуры в потоке, поскольку тепловая энергия заторможенного потока увеличивается по сравнению с тепловой энергией в потоке за счет кинетической энергии макроскопического движения масс среды.

Это обстоятельство объясняет такие физические явления как разогрев элементов конструкции летательных аппаратов, известный в авиации под названием «тепловой барьер», и метеоритных тел, движущихся в атмосфере с большой скоростью.

Расчеты по выражению (2.2.11) температуры носового конуса сверхзвукового пассажирского самолета Ту-144 (крейсерская скорость на высоте 12 км достигала  $u = 2200 \text{ км/ч}$  или  $\sim 611 \text{ м/с}$ , а температура стандартной атмосферы составляет  $-56^\circ\text{C}$ .) дают  $T_0 = 131^\circ\text{C}$ .

Для метеоритных тел, влетающих в земную атмосферу со скоростями порядка первой космической ( $\sim 8 \text{ км/с}$ ), расчет по (10.11) дает величины порядка  $30000 \text{ }^\circ\text{K}$ .

## 2.3 Критическая скорость потока.

### Критические параметры потока

Скорость потока и местная скорость звука в адиабатно изолированных условиях связаны соотношением:

$$\frac{c^2}{k-1} + \frac{u^2}{2} = h_0 = \text{const.} \quad (2.3.12)$$

Из (2.12) следует, что увеличение скорости потока приводит к снижению местной скорости звука. В некотором сечении потока эти скорости могут стать одинаковыми. Скорость потока, численно равная местной скорости звука, называется критической, а соответствующие этому состоянию термодинамические параметры – критическими параметрами.

Величину критической скорости определяют из (10.12), полагая  $v = c = u_{\text{кр}}$ .

$$\frac{u_{\text{кр}}^2}{k-1} + \frac{u_{\text{кр}}^2}{2} = h_0 = \frac{kRT_0}{k-1},$$

откуда

$$u_{\text{кр.}} = \sqrt{\frac{2kRT_0}{k+1}} \quad (2.3.13)$$

Критическому режиму течения соответствует число Маха

$$M = \frac{u}{c} = 1.$$

Критические параметры потока можно определить из выражений

$$\begin{aligned} \frac{T_{\text{кр}}}{T_0} &= \frac{2}{k+1}; \\ \frac{p_{\text{кр}}}{p_0} &= \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/k-1}; \\ \frac{\rho_{\text{кр}}}{\rho_0} &= \left(\frac{2}{k+1}\right)^{1/k-1}. \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

В газодинамических расчетах наряду с числом Маха  $M = u/c$  вводится

коэффициент скорости  $\lambda = u/u_{кр}$ . По смыслу введенных безразмерных скоростей число  $M$  дает соотношение между кинетической и потенциальной энергией потока, а коэффициент  $\lambda$  определяет соотношение кинетической и полной энергии. Полученные выше формулы для расчета параметров торможения устанавливают связь между безразмерными параметрами и безразмерными скоростями, что имеет важное практическое значение, так как позволяет по любому безразмерному параметру найти все остальные величины.

**Газодинамические функции.** В основе расчета стационарных энергетически изолированных потоков идеального газа в рамках одномерной модели лежат уравнения непрерывности и энергии:

Связь между параметрами потока и торможения, как показано выше, определяется безразмерными соотношениями, получившими название газодинамических функций

$$\tau = \frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{-1} = 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2;$$

$$\varepsilon = \frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{k-1}} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}};$$

$$\pi = \frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Таким образом, значения газодинамических функций  $\tau$ ,  $\varepsilon$ ,  $\pi$  зависят от величины показателя адиабаты  $k$  и безразмерных скоростей – чисел Маха  $M = u/c$  и  $\lambda = u/u^*$ . Газодинамические функции табулированы. Критические параметры потоков определяются по газодинамическим таблицам

при  $\lambda = M = 1$ .

Из более сложных газодинамических функций при расчете газовых струйных аппаратов используется функция  $q = f(k, M) = \varphi(k, \lambda)$ , которая определяется как отношение плотности потока газа, изоэнтропно текущего в данном сечении, к плотности критического потока.

$$q = \frac{\rho u}{\rho^* u^*} = \frac{S^*}{S}.$$

В различных модификациях функцию  $q$  можно записать так

$$q = \frac{S^*}{S} = \frac{\varepsilon \lambda}{\varepsilon^*} = \left( \frac{k+1}{k} \right)^{k/k-1} \lambda \left( 1 - \frac{k-1}{k+1} \right)^{1/k-1}.$$

Для критического потока  $q = 1$ .

## 2.4 Закон обращения воздействия

Изменения условий течения газа, вызывающие соответствующие изменения параметров состояния потока, называются **воздействиями**. Существует пять видов воздействий:

1. Геометрическое воздействие – изменение величины проходного сечения канала вдоль потока.

2. Расходное воздействие – изменение массового расхода газа в канале путем вдува (отсоса) дополнительной массы через боковую поверхность.

3. Механическое воздействие – обмен механической энергией в форме технической работы между потоком газа и окружающей средой.

4. Тепловое воздействие – подвод (отвод) тепла в поток.

5. Воздействие трением – учет влияния реально существующих сил вязкого трения в рамках модели идеального газа.

Для рассмотрения влияния комбинации воздействий на скорость потока используем модель одномерного течения.

Выделим в канале переменного сечения участок длиной  $dx$ . Пусть на этом участке изменение размеров проходного сечения канала составит  $dS$ ; изменение массового расхода –  $dG$ ; совершается техническая работа  $dL_{техн}$  (в расчете на единицу массы газа); подводится отнесенное к единице массы газа количество тепла  $dQ$ , а также совершается работа против сил трения  $dL_{трени}$ , также отнесенная к единице массы газа.

Математическая модель такого течения содержит следующие уравнения одномерного стационарного течения газа.

1. Уравнение непрерывности  $G = \rho u S$  или в дифференциальной форме:

$$\frac{dG}{G} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\bar{u}}{u} + \frac{dS}{S}.$$

2. Уравнение баланса механической энергии потока

$$d\left(\frac{\bar{u}^2}{2}\right) + \frac{dp}{\rho} + dL_{\text{техн.}} + d\psi + dL_{\text{трени.}} + \frac{dG}{G} \bar{u} \bar{u}_{\text{бок}} = 0.$$

3. Уравнение первого начала термодинамики для газового потока:

$$dQ = dh + d\left(\frac{u^2}{2}\right) + dL_{\text{техн.}}$$

4. Уравнение состояния идеального газа  $p = \rho RT$ , или в дифференциальной форме:

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}.$$

Последовательно исключая из системы термодинамические параметры состояния газа и учитывая, что  $c = \sqrt{kRT}$ ;  $M = u/c$ , получим

$$(M^2 - 1) \frac{du}{u} = \frac{dS}{S} - \frac{dG}{G} - \frac{1}{c^2} dL_{\text{техн.}} - \frac{k-1}{c^2} dQ - \frac{k}{c^2} dL_{\text{трени.}} \quad (2.4.1)$$

Это соотношение получило название закона обращения воздействия. Особенность этого выражения заключается в том, что знак его левой части изменяется при переходе значения скорости через критическое ( $M = 1$ ), поэтому характер влияния отдельных физических воздействий на газовое течение противоположен при дозвуковом и сверхзвуковом режимах.

Воздействия, вызывающие ускорение ( $du > 0$ ) в дозвуковом потоке ( $M < 1$ ) – сужение канала  $dS < 0$ , подвод дополнительной массы газа  $dG > 0$ , совершение газом работы  $dL_{\text{техн}} > 0$ , трение  $dL_{\text{трени}}$  и подвод тепла  $dQ > 0$ , приводят к замедлению сверхзвукового потока; воздействия обратного знака ( $dS > 0$ ;  $dG < 0$ ;  $dL_{\text{техн}} < 0$ ;  $dL_{\text{трени}}$ ;  $dQ < 0$ ), приводят к замедлению дозвукового потока и ускорению сверхзвукового.

Отсюда следует важный вывод: под влиянием одностороннего воздействия величину скорости газового потока можно довести до критической, но нельзя перевести через нее.

Аппарат, предназначенный для непрерывного увеличения скорости потока, называется соплом. В принципе, возможны четыре вида сопел, реализующих непрерывное ускорение газовых потоков с переходом через скорость звука за счет обращения соответствующих изолированных воздействий: геометрическое, расходное, механическое и тепловое.

## 2.5 Ударные волны. Классификация разрывов в потоках газа

На поверхностях разрыва должны выполняться граничные условия, следующие из законов сохранения массы, импульса и энергии, формулируемые в виде условий непрерывности соответствующих потоков. Рассмотрим элемент поверхности разрыва в связанной с ним системе координат. Пусть  $\vec{n}$  – вектор нормали к поверхности разрыва в данной точке, направленный в сторону течения газа (рисунок 2.5.1).

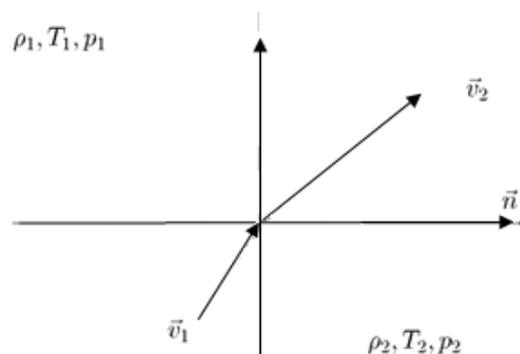


Рисунок 2.5.1 - Схема поверхности разрыва

Параметры течения на входе в поверхность разрыва имеют индекс «1», на выходе – индекс «2».

Условия непрерывности потоков массы, импульса и энергии через поверхность разрыва (в расчете на единицу площади) имеют вид

$$\begin{aligned}\rho_1(\vec{t}_1\vec{n}) &= \rho_2(\vec{t}_2\vec{n}), \\ \rho_1\vec{u}_1(\vec{t}_1\vec{n}) + p_1\vec{n} &= \rho_2\vec{u}_2(\vec{t}_2\vec{n}) + p_2\vec{n} \\ \rho_1(\vec{t}_1\vec{n}) \left[ \frac{u_1^2}{2} + h_1 \right] &= \rho_2(\vec{t}_2\vec{n}) \left[ \frac{u_2^2}{2} + h_2 \right].\end{aligned}\quad (2.5.1)$$

Проекция векторного условия непрерывности потока импульса на плоскость поверхности разрыва приводит к следующему ( $x, y$  – оси координат, лежащие в плоскости разрыва;  $(\vec{u}_j\vec{n}) = u_{jn}, j = 1, 2$ )

$$\begin{aligned}\rho_1 u_{1n} u_{1x} &= \rho_2 u_{2n} u_{2x}, \\ \rho_1 u_{1n} u_{1y} &= \rho_2 u_{2n} u_{2y}.\end{aligned}\quad (2.5.2)$$

Полная система граничных условий (2.5.2) позволяет сделать вывод о существовании двух типов поверхностей разрыва:

1. В первом случае через поверхность разрыва нет потока вещества  $\rho_1 u_{1n} = \rho_2 u_{2n} = 0$ . Поскольку плотности потока  $\rho_1, \rho_2$  отличны от нуля, следовательно,  $u_{1n} = u_{2n} = 0$ .

2. При этом условии непрерывности потока энергии удовлетворяется автоматически, а условие непрерывности потока импульса приводит к соотношению  $\rho_1 = \rho_2$ .

3. Тангенциальные же составляющие скорости и плотность могут испытывать произвольный скачок. Такие разрывы называются тангенциальными. Как показывает исследование устойчивости границы раздела двух относительно движущихся слоев вязкой среды, тангенциальные разрывы являются абсолютно неустойчивыми: они неустойчивы уже по отношению к бесконечно малым возмущениям.

4. Во втором случае поток вещества, а вместе с ним и нормальные к поверхности разрыва компоненты скорости  $u_{1n}$  и  $u_{2n}$  отличны от нуля. Равенство плотностей потока массы  $\rho_1 u_{1n} = \rho_2 u_{2n}$  при этом приводит согласно

(10.17) к условию сохранения тангенциальных составляющих скорости потока  $u_{1x} = u_{2x}, u_{1y} = u_{2y}$ .

5. Плотность, давление и нормальные компоненты скорости испытывают скачок, величина которого определяется условиями (2.5.1). Квадрат скорости потока газа можно заменить суммой квадратов нормальной и касательных составляющих:

$$u^2 = u_n^2 + u_x^2 + u_y^2.$$

Преобразуя выражения (2.5.1) с учетом сделанных замечаний, получим

$$\rho_1 u_{1n} = \rho_2 u_{2n},$$

$$\rho_1 u_{1n}^2 + p_1 = \rho_2 u_{2n}^2 + p_2,$$

$$u_{1x} = u_{2x},$$

$$u_{1y} = u_{2y},$$

$$\frac{u_{1n}^2}{2} + h_1 = \frac{u_{2n}^2}{2} + h_2 \quad (2.5.3)$$

Разрывы этого типа называются ударными волнами. Такие разрывы возникают при обтекании тел сверхзвуковыми газовыми потоками, при торможении сверхзвуковых потоков вблизи омываемых поверхностей и при течениях в каналах, конденсации переохлажденного пара, а также при концентрированных энерговыделениях (взрывах) в сплошных средах.

**Прямой скачок уплотнения.** Прямым скачком уплотнения называется плоская поверхность разрыва, перпендикулярная скорости набегающего потока. Из определения следует

$$u_{1n} = u_1, u_{2n} = u_2,$$

$$u_{1x} = u_{2x} = 0, u_{1y} = u_{2y} = 0.$$

Из (2.5.3) с учетом приведенных соотношений получим

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2,$$

$$\begin{aligned}\rho_1 u_1^2 + p_1 &= \rho_2 u_2^2 + p_2, \\ \frac{u_1^2}{2} + h_1 &= \frac{u_2^2}{2} + h_2.\end{aligned}\tag{2.5.4}$$

Анализ этих соотношений позволяет получить связь между параметрами потока при пересечении фронта прямого скачка.

Соотношение скоростей. Используя первое из выражений (2.5.4), преобразуем второе из них

$$u_1 u_2 (\rho_2 - \rho_1) = p_2 - p_1$$

откуда

$$u_1 u_2 = \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1}.\tag{2.5.5}$$

Для исключения термодинамических параметров потока из последнего выражения, рассмотрим условие непрерывности потока энергии, заменяя

$$h = c_p T = \frac{kRT}{k-1};$$

где  $k = C_p/C_v$  – показатель адиабаты Пуассона,

$$\frac{u_j^2}{2} + c_p T_j = h_0 = c_p T_0, j = 1, 2$$

Отсюда, используя уравнение состояния идеального газа, получим

$$p_j = \rho_j \left[ RT_0 - \frac{k-1}{2k} v_j^2 \right], j = 1, 2\tag{2.5.6}$$

Определим  $p_2 - p_1$  из предыдущих выражений, вычитая одно ( $j = 2$ ) из другого ( $j = 1$ ):

$$p_2 - p_1 = (\rho_2 - \rho_1) \frac{2kRT_0}{k+1}$$

или

$$u_1 u_2 = \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{2kRT_0}{k+1} = u_{кр}^2.$$

Таким образом, скорости потока по обе стороны фронта прямого скачка связаны соотношением

$$u_1 u_2 = u_{кр}^2.$$

Поскольку скорость потока на входе в скачок  $u_1 > u_{кр}$  – поток сверхзвуковой, на выходе из скачка  $u_2 < u_{кр}$ , т.е. при пересечении фронта прямого скачка уплотнения сверхзвуковой поток становится дозвуковым.

**Ударная адиабата.** Процесс изменения состояния газа при пересечении фронта скачка уплотнения происходит за доли секунды (толщина скачка соизмерима со средней длиной свободного пробега молекул), т.е. без теплообмена с окружающей средой. Следовательно, этот процесс можно считать адиабатическим. Однако, как будет показано ниже, ударная адиабата (адиабата Гюгонио) в отличие от адиабаты Пуассона не является изоэнтропой: процесс изменения параметров газа в скачке сопровождается увеличением энтропии.

Для нахождения связи между термодинамическими параметрами газа по обе стороны прямого скачка исключим скорости потока совместным рассмотрением (2.5.5) и (2.5.6). Для этого найдем из (2.5.6) величину  $(p_2 + p_1)$ , суммируя соответствующие выражения при  $j = 2$  и  $j = 1$ :

$$p_2 + p_1 = (\rho_2 + \rho_1)RT_0 - \frac{(k-1)}{2k}(\rho_2 u_2^2 + \rho_1 u_1^2)$$

Проводя преобразования, аналогичные использованным при выводе соотношения скоростей, получим уравнение термодинамического процесса, происходящего при пересечении фронта скачка

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{1}{k} \frac{p_2 + p_1}{\rho_2 + \rho_1},$$

или

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{k+1}{k-1} + \frac{p_1}{p_2}}{\frac{k+1}{k-1} \frac{p_1}{p_2} + 1}. \quad (2.5.7)$$

Выражение (2.5.7) является уравнением ударной адиабаты. Оно существенно отличается от уравнения адиабаты Пуассона (изоэнтропы):

$$pV^k = \frac{p}{\rho^k} = \text{const};$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/k}. \quad (2.5.8)$$

В отличие от адиабаты Пуассона (2.5.8) ударная адиабата (2.5.7) обладает следующими особенностями:

1. Бесконечное увеличение давления в адиабате Пуассона (2.5.8) приводит к соответствующему росту плотности газа

$$\text{при } \frac{p_2}{p_1} \rightarrow \infty \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} \rightarrow \infty$$

в то время как в ударной адиабате (2.5.7)

$$\text{при } \frac{p_2}{p_1} \rightarrow \infty \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} \rightarrow \frac{k+1}{k-1}$$

Таким образом, рост плотности газа при ударном сжатии отстает от такового в адиабате Пуассона. Следствием такого запаздывания является опережающий рост температуры. Это обстоятельство объясняет возгорание горючих материалов при прохождении сильной ударной волны и является основой детонационного механизма распространения горения – взрыва.

2. В адиабате Пуассона не происходит изменения энтропии при сжатии (расширении) газа, в то время как ударное сжатие сопровождается возрастанием энтропии. Для доказательства рассмотрим изменение энтропии в произвольном процессе изменения состояния идеального газа

$$dS = \frac{dq}{T} = \frac{1}{T}(dh - Vdp) = \frac{c_p dT}{T} - \frac{dp}{\rho T} = \frac{kR}{k-1} \left[ \frac{dp}{p} - \frac{dp}{\rho} \right] - R \frac{dp}{p} =$$

$$= \frac{R}{k-1} \left[ \frac{dp}{p} - k \frac{dp}{\rho} \right].$$

Проинтегрируем полученное дифференциальное уравнение в пределах от некоторого исходного состояния газа (1) до состояния (2)

$$\Delta S = \int_1^2 dS = \frac{R}{k-1} \ln \left[ \frac{p_2}{p_1} \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^k \right] = \frac{R}{k-1} \ln A.$$

Очевидно, что изменение состояния идеального газа в адиабате Пуассона не сопровождается изменением энтропии

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^k, \Delta S = \ln(A = 1) = 0.$$

В ударной адиабате вследствие запаздывания роста плотности с увеличением давления по сравнению с адиабатой Пуассона

$$\frac{p_2}{p_1} > \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^k, \Delta S = \ln(A > 1) > 0.$$

Следовательно, ударное сжатие газа сопровождается ростом энтропии, т.е. диссипацией энергии, необратимым переходом части механической энергии газа в тепловую. Становится понятным существование в природе только скачков уплотнения – процессов ударного сжатия, но не ударного разрежения газа, хотя приведенные выше условия непрерывности потоков массы, импульса и энергии теоретически одинаково пригодны для обеих разновидностей скачкообразного изменения состояния: процесс ударного разрежения (скачкообразного уменьшения плотности) сопровождался бы уменьшением энтропии без компенсирующего процесса совершения работы, что противоречит второму началу термодинамики.

Потери механической энергии в скачке обуславливают появление дополнительного вида сопротивления тел при сверхзвуковом обтекании – так называемого волнового сопротивления.

Стремление минимизировать величину этого вида сопротивления явилось причиной появления ряда конструкторских решений в авиации около- и сверхзвуковых скоростей: стреловидные крылья тонкого заостренного профиля, аэродинамические иглы и т.д.

## 2.6 Тепловые скачки

В условиях концентрированного выделения теплоты (горение, детонация, экзотермическая химическая реакция, конденсация паров в движущемся газе) термодинамические параметры и скорости газа изменяются скачкообразно, т.е. образуются тепловые скачки.

Анализ течения газа через фронт теплового скачка проведем, считая скачок прямым,  $u_n = u$ , в рамках модели идеального газа. Граничные условия непрерывности потоков массы и импульса остаются полностью аналогичными соответствующим выражениям (2.18):

$$\begin{aligned}\rho_1 u_1 &= \rho_2 u_2, \\ \rho_1 u_1^2 + p_1 &= \rho_2 u_2^2 + p_2,\end{aligned}\quad (2.24)$$

Условие непрерывности потока энергии содержит дополнительное слагаемое – удельную (отнесенную к единице массы) энергию  $q$ , выделяемую на скачке

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} + q = h_2 + \frac{u_2^2}{2}.\quad (2.25)$$

В общем случае идеальный газ за фронтом теплового скачка имеет иной химический состав, нежели перед скачком. Поэтому уравнения состояния газа до и после скачка различны:

$$p_1 = \rho_1 R_1 T_1, p_2 = \rho_2 R_2 T_2.\quad (2.26)$$

Изменяются также показатель адиабаты газа  $k_1 \neq k_2$ , температура торможения  $T_0^{(1)} \neq T_0^{(2)}$  и величина критической скорости

$$u_{кр}^j = \sqrt{\frac{2k_j R_j T_0^j}{k_j + 1}}, \quad j = 1, 2.$$

Заменяя в (10.25)  $h_j = k_j R_j / (k_j - 1)$  и вводя безразмерные скорости  $\lambda_j = u_j / u_{кр}^{(j)}$  получим уравнение, связывающее скорости газа до и после скачка:

$$\lambda_2^2 - \bar{K} \frac{1 + \lambda_1^2}{\lambda_1 \sqrt{1 + \bar{q}}} \lambda_2 + 1 = 0, \quad (2.27)$$

где

$$\bar{K} = \frac{k_2}{k_1} \sqrt{\frac{k_1^2 - 1}{k_2^2 - 1}}, \quad \bar{q} = \frac{q}{h_0^{(j)}}$$

Решение уравнения (2.27) имеет вид

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \bar{K} \frac{1 + \lambda_1^2}{\lambda_1 \sqrt{1 + \bar{q}}} \pm \sqrt{\bar{K}^2 \frac{1 + \lambda_1^2}{4\lambda_1^2(1 + \bar{q})} - 1}. \quad (2.28)$$

Уравнение (2.28) упрощается для частного случая, когда физические свойства газа в тепловом скачке не меняются:  $k_1 = k_2 = k$ ;  $K = 1$  и

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \frac{1 + \lambda_1^2}{\lambda_1 \sqrt{1 + \bar{q}}} \pm \sqrt{\frac{1 + \lambda_1^2}{4\lambda_1^2(1 + \bar{q})} - 1}. \quad (2.29)$$

Уравнения (2.27) и (2.28) показывают, что теоретически возможно существование четырех типов прямых тепловых скачков, отвечающих условиям  $\lambda_1 > 1$  и  $\lambda_1 < 1$ , при которых в зависимости от величины  $\sqrt{1 + \bar{q}}$  безразмерные скорости за скачком могут быть  $\lambda_2 < 1$  и  $\lambda_2 > 1$ .

В действительности, тепловые скачки с  $\lambda_1 < 1$  и  $\lambda_2 > 1$  не реализуются, так как переход через критическую скорость в условиях подвода тепла невозможен. Не реализуются также тепловые скачки, когда  $\lambda_1 > 1$  и  $\lambda_2 > 1$ . Такие скачки перемещались бы относительно находящегося перед ними газа со сверхзвуковой скоростью, и их возникновение не должно было бы отразиться на состоянии газа. Следовательно, реальными оказываются тепловые скачки двух типов:

1.  $\lambda_1 > 1$  и  $\lambda_2 < 1$  – сверхзвуковые скачки, в которых выделение тепла сопровождается сжатием газа ( $p_2 > p_1$ ).

2.  $\lambda_1 < 1$  и  $\lambda_2 < 1$  – дозвуковые скачки, в которых выделение теплоты сопровождается разрежением газа ( $p_2 < p_1$ ).

В зависимости от пространственной ориентации фронта скачка по отношению к скорости потока тепловые скачки также могут быть косыми и криволинейными.

### **Контрольные вопросы**

1. Что называется возмущением в потоке газа? Виды возмущений.
2. Как называется скорость распространения малых возмущений в сплошной среде?
3. Приведите формулы для расчета скорости распространения малых возмущений в сплошных средах.
4. Запишите уравнение энергии адиабатно-изолированного течения идеального газа.
5. Как определяется температура торможения идеального газа?
6. Что называется числом Маха?
7. Что такое критическая скорость и критические параметры потока газа?
8. Запишите уравнение Майера.
9. Что называется газодинамическими функциями?
10. Какие существуют виды воздействий, вызывающих изменения параметров состояния потока газа?
11. Что называется ударной волной в потоке газа?
12. Что такое прямой скачок уплотнения?
13. Запишите уравнение ударной адиабаты.
14. Назовите особенности ударной адиабаты.
15. Когда образуются тепловые скачки? Назовите возможные типы прямых тепловых скачков.

## Список литературы

1. Альтшуль, А.Д. Гидравлические сопротивления / А.Д. Альтшуль. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: Недра, 1982. – 224 с.
2. Бендерский, Б.Я. Аэрогидрогазодинамика. Курс лекций с краткими биографиями и интересными случаями из жизни ученых: учебное пособие / Б.Я. Бендерский. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва; Ижевск : Ин-т компьютерных исследований : Регулярная и хаотическая динамика, 2012. – 499 с. – ISBN 978-5-93972-934-5.
3. Валландер, С.В. Лекции по гидроаэромеханике / С.В. Валландер. – 2-е изд. – Санкт-Петербург: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005. – 295 с. – ISBN 5-288-03755-8.
4. Гальперин, Л.Г. Основы гидрогазодинамики : учебное пособие / Л.Г. Гальперин ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, [Уральский энергетический институт]. - Екатеринбург : УрФУ, 2016. - 215 с. – ISBN 978-5-321-02520-8.
5. Гиргидов, А.Д. Техническая механика жидкости и газа : учебник для студентов вузов, обучающихся по строит. направлениям и специальностям / А.Д. Гиргидов; Министерство общ. и проф. образования Российской Федерации, С.-Петерб. гос. техн. ун-т. – Санкт-Петербург: Изд-во СПбГТУ, 1999. – 394 с. – ISBN 5-7422-0075-7.
6. Дейч, М.Е. Гидрогазодинамика: учебное пособие / М.Е. Дейч, А.Е. зарянкин. – Москва : Энергоатомиздат, 1984. – 384 с.
7. Емцев, Б.Т. Техническая гидромеханика / Б.Т. Емцев. – Москва : Машиностроение, 1987. – 440 с.
8. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа: учебник для вузов / Л.Г. Лойцянский. – 7-е изд., испр. – Москва: Дрофа, 2003. – 840 с. – ISBN 5-7107-6327-6 .

9. Павленко, В.Г. Основы механики жидкости: учебное пособие для системы повышения квалификации инженеров-судостроителей вод. трансп., инженеров плавсостава / В.Г. Павленко. - Ленинград: Судостроение, 1988. - 239 с. – ISBN 5-7355-0023-6.
10. Роуч, П. Вычислительная гидродинамика / В. Роуч ; пер. с англ. В.А. Гущина, В.Я. Митницкого; под ред. П. И. Чушкина. - Москва : Мир, 1980. - 616 с. – Москва: Мир, 1980. – 616 с.
11. Самойлович, Г.С. Гидроаэромеханика: учебник для вузов / Г.С. Самойлович. – Москва: Машиностроение, 1980. – 280 с.
12. Слезкин, Н.А. Лекции по гидромеханике / Н.А. Селезенкин. – Москва : МГУ, 1984. – 225 с.
13. Справочник по гидравлике / В.А. Большаков, Ю.М. Константинов, В.Н. Попов [и др.]; под ред. В.А. Большакова. - 2-е изд., перераб. и доп. - Киев: Вища шк., 1984. - 343 с.
14. Шевелев, Ф.А. Таблицы для гидравлического расчета стальных, чугунных, асбестоцементных и пластмассовых труб / Ф.А. Шевелев ; Госстрой СССР. Гл. упр. по строит. проектированию предприятий, зданий и сооружений. Всесоюз. объединение "Союзводканалниипро-ект". Всесоюз. науч.-исслед. ин-т водоснабжения, канализации, гидротехн. сооружений и инж. гидрогеологии "Водгео". - 5-е изд., доп. - Москва : Стройиздат, 1973. - 113 с.
15. Шейпак, А.А. Основы механики жидкости и газа: учебное пособие / А.А. Шейпак – Москва: МАСИ, 1991. – 96 с.

Таблица П.1  
Значения кинематической вязкости воды  $\nu = f(t, \text{°C})$

$t, \text{°C}$	$\nu \cdot 10^{-6}$	$t, \text{°C}$	$\nu \cdot 10^{-6}$
0	1,79	18	1,06
1	1,73	19	1,04
2	1,67	20	1,01
3	1,62	22	0,99
4	1,57	24	0,92
5	1,52	26	0,88
6	1,47	28	0,84
7	1,43	30	0,80
8	1,39	35	0,73
9	1,35	40	0,66
10	1,31	45	0,60
11	1,27	50	0,56
12	1,24	55	0,51
13	1,21	60	0,48
14	1,18	70	0,41
15	1,15	80	0,37
16	1,12	90	0,33
a17	1,09	100	0,28

Таблица П.2  
Эквивалентная шероховатость  $\Delta$  для труб из разных материалов

Трубы	Состояние трубы	$\Delta, \text{мм}$
Тянутые из стекла и цветных металлов	Новые и технически гладкие	0...0,002
	Бесшовные стальные	0,01...0,02
Стальные сварные	Новые чистые	0,03...0,1
	Умеренно заржавевшие	0,3...0,7
	Сильно заржавевшие или с большими отложениями	2...4
Оцинкованные железные	Новые чистые	0,1...0,2
	Чугунные	0,2...0,5
Асбестоцементные	Бывшие в употреблении	0,5...1,5
	Новые	0,05...0,1
Бетонные	Новые	0,15...0,3
	Бывшие в употреблении	0,2...0,8
Полиэтиленовые (2...20 мм)	Из необработанного бетона	1...3
	Новые чистые	0,003

**ПРИЛОЖЕНИЕ Б**

Таблица П. 3 Значения расходных характеристик для квадратичной области сопротивления

d, мм	S, дм <sup>2</sup>	Нормальные трубы			Новые чугунные трубы			Новые стальные трубы		
		K <sub>sq</sub> , л/с	K <sub>sq</sub> <sup>2</sup> /1000	1000/ K <sub>sq</sub> <sup>2</sup>	K <sub>sq</sub> , л/с	K <sub>sq</sub> <sup>2</sup> /1000	1000/ K <sub>sq</sub> <sup>2</sup>	K <sub>sq</sub> , л/с	K <sub>sq</sub> <sup>2</sup> /1000	1000/ K <sub>sq</sub> <sup>2</sup>
·10										
50	1,963	8,313	0,0691	14,472	9,947	0,098	10,111	10,1	0,102	9,804
75	4,418	24,77	0,6136	1,6297	29,27	0,8567	1,1672	29,7	0,8821	1,1337
100	7,854	53,61	2,874	0,34795	62,85	3,95	0,25316	63,73	4,061	0,24624
125	12,272	9739	9,485	0,10543	113,5	12,882	0,07763	115,1	13,248	0,07548
150	17,671	158,4	25,091	0,03985	183,9	33,819	0,02957	186,3	34,708	0,02881
200	31,416	340,8	116,15	0,00861	393	154,45	0,00647	398	158,4	0,00631
250	49,087	616,4	379,9	0,00263	707,6	500,7	0,002	716,3	513,09	0,00195
300	70,686	999,3	998,6	0,00100	1143	1306	0,766·10 <sup>-3</sup>	1157	1339	0,747·10 <sup>-3</sup>
350	96,212	1503	2259	0,443·10 <sup>-3</sup>	1715	2941	0,340·10 <sup>-3</sup>	1735	3007	0,333·10 <sup>-3</sup>
400	125,664	2140	4580	0,218·10 <sup>-3</sup>	2435	5929	0,169·10 <sup>-3</sup>	2463	6066	0,165·10 <sup>-3</sup>
450	159,043	2920	8526	0,117·10 <sup>-3</sup>	3316	10996	0,909·10 <sup>-4</sup>	3354	11249	0,889·10 <sup>-4</sup>
500	196,350	3857	14876	0,672·10 <sup>-4</sup>	4374	19132	0,523·10 <sup>-4</sup>	4423	19563	0,511·10 <sup>-4</sup>

600	282,743	6239	38925	$0,257 \cdot 10^{-4}$	7053	49745	$0,201 \cdot 10^{-4}$	7131	50851	$0,197 \cdot 10^{-4}$
700	384,845	9362	87647	$0,114 \cdot 10^{-4}$	10560	111514	$0,897 \cdot 10^{-5}$	10674	113934	$0,878 \cdot 10^{-5}$
800	502,656	13301	176917	$0,565 \cdot 10^{-5}$	14973	224191	$0,446 \cdot 10^{-5}$	15132	228977	$0,437 \cdot 10^{-5}$
900	636,173	18129	328661	$0,304 \cdot 10^{-5}$	20373	415059	$0,241 \cdot 10^{-5}$	20587	423825	$0,236 \cdot 10^{-5}$
1000	785,398	23911	571736	$0,175 \cdot 10^{-5}$	26832	719956	$0,139 \cdot 10^{-5}$	27111	735006	$0,136 \cdot 10^{-5}$
1100	950,334	30709	943043	$0,106 \cdot 10^{-5}$	34416	–	–	34769	1208883	$0,827 \cdot 10^{-6}$
1200	1130,976	38601	1490037	$0,671 \cdot 10^{-6}$	43211	–	–	43650	1905323	$0,525 \cdot 10^{-6}$
1300	1327,326	47604	2266140	$0,441 \cdot 10^{-6}$	53232	–	–	53769	2891105	$0,346 \cdot 10^{-6}$
1400	1539,384	57807	3341649	$0,299 \cdot 10^{-6}$	64581	–	–	65226	4254431	$0,235 \cdot 10^{-6}$

## ПРИЛОЖЕНИЕ В

Таблица П.4

Значения удельных сопротивлений  $A' = 1/K^2$  для серийных вибропрессованных железобетонных труб при  $v = 1$  м/с

Диаметр труб $d$ , мм	$1/K^2$ (для $V$ в м <sup>3</sup> /с)
500	0,06391
600	0,02481
800	0,005575
1000	0,001751
1200	0,0006797
1400	0,0003054
1600	0,0001527

Таблица П.5

Значения поправочных коэффициентов  $k$  при вычислении удельного сопротивления  $A$  для железобетонных труб

$v$ , м/с	$k$	$v$ , м/с	$k$	$v$ , м/с	$k$
0,2	1,439	0,8	1,052	1,9	0,865
0,25	1,368	0,85	1,043	2,0	0,855
0,3	1,313	0,9	1,024	2,1	0,846
0,35	1,268	1,0	1	2,2	0,837
0,4	1,230	1,1	0,991	2,3	0,828
0,45	1,198	1,2	0,960	2,4	0,821
0,5	1,170	1,3	0,943	2,5	0,813
0,55	1,145	1,4	0,926	2,6	0,806
0,6	1,123	1,5	0,912	2,7	0,799
0,65	1,102	1,6	0,899	2,8	0,792
0,7	1,084	1,7	0,887	2,9	0,786
0,75	1,067	1,8	0,876	3,0	0,780

Примечание. Удельное сопротивление  $A$  при произвольной скорости течения в железобетонной трубе определяется как  $A = k \cdot A'$

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Таблица П.6

Удельные сопротивления асбестоцементных труб, с<sup>2</sup>/м<sup>6</sup>

Класс труб	D <sub>у</sub> , мм	D <sub>р</sub> , мм	Площадь сечения, м <sup>2</sup>	Средняя в сечении скорость V, м/с								
				0,25	0,35	0,5	0,75	1	1,5	2	2,5	3
Трубы типа 1												
ВТ 6	100	104	0,0085	192	181	171	160	153	144	139	136	133
	150	146	0,0167	33,1	31,2	29,4	27,5	26,3	24,9	24	23,4	22,9
	200	196	0,0302	7,18	6,77	6,37	5,97	5,71	5,39	5,2	5,06	4,97
	250	244	0,0468	2,3	2,17	2,04	1,91	1,83	1,73	1,67	1,62	1,59
	300	289	0,066	0,96	0,9	0,85	0,79	0,76	0,72	0,69	0,67	0,66
	350	344	0,088	0,45	0,43	0,4	0,38	0,36	0,34	0,33	0,32	0,31
	400	381	0,114	0,228	0,215	0,202	0,189	0,181	0,171	0,165	0,161	0,158
	500	473	0,176	0,074	0,07	0,066	0,062	0,059	0,056	0,054	0,052	0,057
ВТ 9	100	100	0,0079	236	222	210	196	188	177	171	167	163

	150	141	0,0154	39,6	37,4	35,1	32,9	31,5	29,7	28,7	27,9	27,4
	200	189	0,0281	9,93	9,36	8,81	8,26	7,9	7,46	7,19	7,01	6,87
	250	235	0,0434	2,8	2,69	2,49	2,33	2,23	2,11	2,03	1,98	1,94
	300	279	0,061	1,14	1,08	1,01	0,95	0,91	0,86	0,83	0,81	0,79
	350	322	0,081	0,54	0,52	0,48	0,45	0,43	0,41	0,39	0,38	0,37
	400	368	0,106	0,273	0,257	0,242	0,227	0,217	0,205	0,198	0,193	0,189
	500	456	0,163	0,089	0,084	0,079	0,074	0,071	0,067	0,065	0,063	0,062
BT 12	100	96	0,0072	292	275	259	242	232	219	211	206	202
	150	135	0,0143	49,7	46,9	44,1	41,3	39,5	37,3	36	35,1	34,4
	200	181	0,0257	10,85	10,23	9,63	9,02	8,63	8,15	7,86	7,66	7,51
	250	228	0,0408	3,28	3,09	2,91	2,72	2,61	2,46	2,37	2,31	2,27
	300	270	0,057	1,36	1,28	1,21	1,13	1,08	1,02	0,99	0,96	0,94
	350	312	0,076	0,64	0,61	0,57	0,53	0,51	0,48	0,47	0,45	0,44
	400	356	0,1	0,324	0,306	0,288	0,27	0,258	0,244	0,235	0,229	0,224
	500	441	0,152	0,107	0,101	0,095	0,089	0,085	0,80	0,077	0,075	0,074

Трубы типа 2

BT 9	200	196	0,0302	7,18	6,77	6,37	5,97	5,71	5,39	5,2	5,06	4,97
	250	242	0,046	2,4	2,27	2,13	2	1,91	1,8	1,74	1,7	1,66
	300	286	0,064	1,01	0,95	0,9	0,84	0,8	0,76	0,73	0,71	0,7
	350	329	0,085	0,49	0,46	0,43	0,41	0,39	0,37	0,36	0,35	0,34
	400	377	0,112	0,241	0,227	0,214	0,2	0,191	0,181	0,174	0,17	0,167
	500	466	0,171	0,08	0,076	0,071	0,067	0,064	0,06	0,058	0,057	0,055
BT 12	200	188	0,0278	8,91	8,4	7,9	7,41	7,09	6,69	6,45	6,29	6,17
	250	234	0,043	2,86	2,7	2,54	2,38	2,28	2,15	2,07	2,02	1,98
	300	276	0,06	1,21	1,14	1,08	1,01	0,97	0,91	0,88	0,86	0,84
	350	317	0,079	0,59	0,56	0,53	0,49	0,47	0,44	0,43	0,42	0,41
	400	363	0,103	0,293	0,276	0,26	0,244	0,233	0,22	0,212	0,207	0,203
	500	450	0,158	0,096	0,091	0,085	0,08	0,076	0,072	0,07	0,068	0,067
BT 15	200	180	0,0254	11,17	10,53	9,91	9,28	8,88	8,39	8,09	7,88	7,73
	250	226	0,0401	3,43	3,23	3,04	2,85	2,73	2,57	2,48	2,42	2,37
	300	267	0,056	1,44	1,36	1,28	1,2	1,15	1,08	1,04	1,02	1
	350	307	0,074	0,7	0,66	0,62	0,58	0,56	0,52	0,51	0,49	0,48

	400	352	0,097	0,344	0,324	0,305	0,286	0,273	0,258	0,249	0,243	0,238
	500	436	0,149	0,113	0,107	0,1	0,094	0,09	0,085	0,082	0,08	0,078
Трубы типа 3												
BT 9	200	198	0,0308	6,81	6,42	6,04	5,66	5,42	5,11	4,93	4,81	4,71
	300	279	0,061	1,15	1,08	1,02	0,95	0,91	0,86	0,83	0,81	0,79
BT 12	200	192	0,029	7,99	7,53	7,09	6,64	6,36	6	5,78	5,64	5,53
	300	270	0,057	1,36	1,28	1,21	1,13	1,08	1,02	0,99	0,96	0,94
BT 15	200	174	0,0238	13,32	12,55	11,81	11,07	10,59	10	9,64	9,4	9,22
	300	256	0,051	1,8	1,69	1,59	1,49	1,43	1,35	1,3	1,27	1,24

Таблица П.7  
Характеристики жидкости и материала труб

Материал	Плотность жидкости $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	Модуль упругости жидкости $E$ или материала стенок труб $E_{тр}$ , 10 <sup>6</sup> кПа	Отношение модулей упругости воды и материала труб $E/E_{тр}$
Вода	1000	2,03	-
Нефть	900	1,324	-
Керосин	800	1,37	-
Ртуть	13600	32,4	-
Свинцовые трубы	-	4,9...0,196	0,4...10
Деревянные трубы	-	9,81	0,2
Бетонные трубы	-	19,62	0,1
Чугунные трубы	-	98,1	0,02
Стальные трубы	-	196	0,01

Для заметок

Учебное издание

**Анисимова Ольга Станиславовна**

**Ткаченко Николай Иванович**

**ГИДРОГАЗОДИНАМИКА**

Учебное пособие

Издается в авторской редакции

Издательство Донского ГАУ

346493, Донской ГАУ, пос. Персиановский, Октябрьский (с) р-он, Ростовская обл.

Издательско-полиграфическое предприятие

ООО "МП Книга", г.Ростов-на-Дону, Таганрогское шоссе, 106

Печать оперативная. Объем 11 .п.л. Тираж 100 экз. Заказ №4874



