МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ДЕПАРТАМЕНТ НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ И ОБРАЗОВАНИЯ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО Донской ГАУ)
Донской аграрный колледж

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по УР и ЦТ
____________________Ширяев С.Г.
« 29» августа 2023 г.
м.п.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

СОО.01.06 Математика

Специальность 36.02.01 Ветеринария (на базе основного общего образования)

Форма обучения *Очная*

Организация-разработчик: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный аграрный университет»

Разработчик:

Папченко Н.Г.		доцент	канд. физ.-мат. наук	
ФИО	(подпись)	(должность)	(ученая степень)	(ученое звание)

Рассмотрено и рекомендовано:

На заседании Методического совета Колледжа протокол заседания от 28.08.2023 № 1

Директор Донского аграрного колледжа ____________________ Широкова Н.В.
(подпись) ФИО

п. Персиановский, 2023 г.

1. Общие положения

Контрольно-оценочные средства предназначены для контроля и оценки образовательных достижений обучающихся, освоивших программу учебной дисциплины СОО.01.06 Математика.

Фонд оценочных средств включают контрольно-оценочные материалы для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации в форме экзамена.

Текущий контроль успеваемости проводится в течение семестра в форме периодического выборочного устного опроса и контроля за выполнением заданий на практических занятиях.

2. Результаты освоения дисциплины, подлежащие проверке

Результаты обучения (умения, знания, компетенции)	**Основные показатели оценки результатов**	**Форма контроля и оценивания**
В результате изучения дисциплины обучающийся должен **уметь:**		
владеть методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;	владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;	Устный опрос. Решение задач. Выполнение расчетной работы. Подготовка и защита реферата. Математический диктант. Тестирование. Экзамен
владеть стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств;	владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств;	Устный опрос. Решение задач. Выполнение расчетной работы. Подготовка и защита реферата. Математический диктант. Тестирование. Экзамен
владеть основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;	владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; формирование умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;	Устный опрос. Решение задач. Выполнение расчетной работы. Подготовка и защита реферата. Математический диктант. Тестирование. Экзамен
находить и оценивать вероятности наступления собы-	нахождение и оценивание вероятности наступления собы-	Устный опрос. Решение задач. Выполнение расчетной рабо-

тий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин;	тий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин;	ты. Подготовка и защита реферата. Математический диктант. Тестирование. Экзамен
владеть навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач	владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач	Решение задач. Выполнение расчетной работы.
В результате изучения дисциплины обучающийся должен **знать:**		
сформированность представлений о математике как части мировой культуры и о месте математики в современной цивилизации, о способах описания на математическом языке явлений реального мира;	формирование представлений о математике как части мировой культуры и о месте математики в современной цивилизации, о способах описания на математическом языке явлений реального мира;	Устный опрос. Решение задач. Выполнение расчетной работы. Подготовка и защита реферата. Математический диктант. Тестирование. Экзамен
сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;	формирование представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;	Устный опрос. Решение задач. Выполнение расчетной работы. Подготовка и защита реферата. Математический диктант. Тестирование. Экзамен
сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа;	формирование представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа;	Устный опрос. Решение задач. Выполнение расчетной работы. Подготовка и защита реферата. Математический диктант. Тестирование. Экзамен
сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, о статистических закономерностях в реальном мире, об основных понятиях элементарной теории вероятностей	формирование представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, о статистических закономерностях в реальном мире, об основных понятиях элементарной теории вероятностей	Устный опрос. Решение задач. Выполнение расчетной работы. Подготовка и защита реферата. Математический диктант. Тестирование. Экзамен

3. Контрольно-оценочные материалы текущего контроля

3.1. Периодический письменный/устный опрос

Пример контрольной работы

Вариант 1

1) Сложить комплексные числа: $z_1 = -0{,}6 + 0{,}2i;\ z_2 = -0{,}4 - 0{,}5i;$
2) Вычесть комплексные числа: $z_1 = \frac{7}{8} - \frac{1}{5}i;\ z_2 = \frac{3}{8} - \frac{1}{5}i;$

3) Умножить комплексные числа: $z_1 = 2 - 3i; z_2 = -4 + i;$

4) Разделить комплексные числа: $z_1 = 3 - 2i; z_2 = 1 + 3i;$

5) Вычислить: $i^7 + i^5 + i^3 + i^2$

Вариант 2

1) Сложить комплексные числа:$z_1 = -3{,}6 + 0{,}2i; z_2 = -1{,}4 - 0{,}2i;$

2) Вычесть комплексные числа:$z_1 = 4 - 2i; z_2 = 3 + 8i;$

3) Умножить комплексные числа: $z_1 = -1 + 6i; z_2 = 6 - 3i;$

4) Разделить комплексные числа:$z_1 = 3 - 2i; z_2 = 1 + 3i;$

5) Вычислить: $i^6 \times i^4 \times i^2$

Критерии оценки:

- оценка «отлично» выставляется студенту, если верно решит 5 заданий;
- оценка «хорошо» выставляется студенту, если верно решит 4 задания;
- оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если верно решит 3 задания;
- оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если он верно решит менее 3 заданий

Пример устного опроса.

Ответить на вопросы:

1. Определение абсолютной погрешности.
2. Определение границы абсолютной погрешности
3. Определение относительной погрешности
4. Определение границы относительной погрешности
5. Правило округление с недостатком, с избытком, с наименьшей погрешностью
6. Правило сложения приближенных значений числа
7. Правило вычитания приближенных значений числа
8. Правило умножения приближенных значений числа
9. Правило деления приближенных значений числа

Критерии оценки:

- оценка «отлично» выставляется студенту, если он сформулирует 5 ответов на вопросы;
- оценка «хорошо» выставляется студенту, если он сформулирует 4 ответов на вопросы;
- оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он сформулирует ответа на вопросы;
- оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если он сформулирует менее 3 ответов на вопросы.

Пример математического диктанта

Ответить на вопросы по вариантам письменно.

Вариант 1

1. Представьте угол 740° в виде а° + 360°n , где n – целое число, 0<а<180°.

2. Точка P_{50}° – конечная точка поворота на 50°. Найдите наименьшее по модулю значение угла β, точки P_β, которая получается из точки P_{50}° симметрией относительно оси ординат.

3. Переведите угол 150° из градусной меры в радианную.

4. Переведите угол 1,25р из радианной меры в градусную.

5. Запишите равенство …^{0}=$\frac{\pi}{2}$.

6. Запишите формулу перехода от радиан к градусам.

7. Запишите значение$\sin\frac{\pi}{4}$

Вариант 2

1. Представьте угол –710° в виде а° + 360°n , где n – целое число, 0<а<180°.

2. Точка P_{50}° – конечная точка поворота на 50°. Найдите наименьшее по модулю значение угла β, точки P_β, которая получается из точки P_{50}° симметрией относительно оси абсцисс.

3. Переведите угол 135° из градусной меры в радианную.

4. Переведите угол 2,5p из радианной меры в градусную.
5. Запишите равенство...$^0 = \frac{\pi}{4}$.
6. Запишите формулу перехода от радиан к градусам.
7. Запишите значение $\cos\frac{\pi}{6}$

Критерии оценки:
- оценка «отлично» выставляется студенту, если верно решит 7 заданий;
- оценка «хорошо» выставляется студенту, если верно решит 6 заданий;
- оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если верно решит 4 задания;
- оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если он верно решит менее 4 заданий

3.2 Пример тестовых заданий

Ответить на вопросы теста.

1. Выразите в радианной мере величины углов:

I	60^0	II	45^0
	10^0		20^0
	-75^0		-120^0
	225^0		300^0
	7220^0		4500^0

2. Выразите в градусной мере величины углов:

I	$\frac{\pi}{6}$	II	$\frac{\pi}{2}$
	$\frac{7\pi}{18}$		$\frac{\pi}{36}$
	-11π		$-\frac{9\pi}{4}$
	$\frac{\pi}{720}$		$\frac{\pi}{540}$

3. В какой четверти расположен угол α, если:

I	$\alpha = 298^0$	II	$\alpha = 717^0$
	$\alpha = -72^0$		$\alpha = -113^0$
	$\alpha = \frac{2\pi}{7}$		$\alpha = \frac{17\pi}{7}$
	$\alpha = -\frac{9\pi}{8}$		$\alpha = -\frac{4\pi}{9}$

4. Укажите положение точек, изобразив их на единичной окружности.

I	A $\frac{\pi}{4}$	II	A $\frac{\pi}{6}$
	B $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$		B $\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$
	C 175^0		C 195^0
	D (-3)		D $(-1,4)$

Критерии оценки:
- оценка «отлично» выставляется студенту, если верно решит 10 заданий;
- оценка «хорошо» выставляется студенту, если верно решит 7 заданий;
- оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если верно решит 4 задания;
- оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если он верно решит менее 4 заданий

3.3. Оценка выполненных практических работ

Примерное практическое задание

Выполнить расчетную работу по вариантам.
В результате измерений какой-то величины получены следующие результаты. Задание:
1. Составить вариационный ряд.
2. Определить эмпирическую функцию распределения. Построить ее график.
3. Построить полигоны частот или относительных частот. Сделать вывод о законе распределения изучаемой величины.
4. Найти числовые характеристики изучаемой величины.
5. Найти моду, медиану выборки.
6. Найти точечные оценки математического ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения изучаемой случайной величины.
7. Найти интервальную оценку математического ожидания с доверительной вероятностью 0,95.

Вариант 1

4,1	4,2	4,3	4,1	4,0
4,2	4,2	3,9	4,4	4,2
4,0	4,3	4,1	4,3	4,5
4,2	4,2	4,4	4,0	4,2
4,5	4,1	4,3	4,2	4,4

Вариант 2

4,1	4,2	4,3	4,1	4,0
4,2	4,2	3,9	4,4	4,2
4,0	4,3	4,1	4,3	4,5
4,2	4,2	4,4	4,0	4,2
4,5	4,1	4,3	4,2	4,4

Критерии оценки:
- оценка «отлично» выставляется студенту, если верно решит 7 заданий;
- оценка «хорошо» выставляется студенту, если верно решит 5-6 заданий;
- оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если верно решит 4 задания;
- оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если он решит менее 4 заданий

Оценка выполненных практических работ проводится.
- на занятиях (опрос, решение задач, деловая игра, круглый стол, тестирование (письменное или компьютерное), ответы (письменные или устные) на теоретические вопросы, решение практических задач и выполнение заданий на практическом занятии, выполнение контрольных работ;
- по результатам выполнения индивидуальных заданий;
- по результатам проверки качества конспектов лекций, рабочих тетрадей и иных материалов;

Оценка за семестр

Семестровая оценка определяется как округленное до целого числа среднее арифметическое оценок текущего контроля, полученных в течение семестра.

4. Контрольно-оценочные материалы для промежуточной аттестации

Учебным планом по дисциплине СОО.01.06 Математика предусмотрена промежуточная аттестация в форме экзамена.

4.1. Задание промежуточного контроля

Пример экзаменационного билета

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ДЕПАРТАМЕНТ НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ И ОБРАЗОВАНИЯ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО Донской ГАУ)
Донской аграрный колледж

Кафедра "Естественнонаучных дисциплин"
Дисциплина: СОО.01.06 Математика

Утверждено на заседании
кафедры, протокол
№ __ от "__" _________ 20__ г.

Направление подготовки: *36.02.01 Ветеринария*

Билет № 1

ЗАДАНИЕ 1 (обязательное, оценивается как удовлетворяющее минимальному уровню образования состоит из 7 вопросов).

1. Вычислите $\sqrt[5]{32}+\sqrt[3]{-8}$
2. Сравнить числа $\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{3}{7}}$ и $\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{5}{7}}$
3. Найти корень уравнения $\log_3(x+5)=3$
4. Переведите из градусной в радианную меру: $14{,}8^0$; $70{,}28^0$
5. Решить уравнение $\sqrt{19-3x}=5$
6. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 1}\frac{10x-2}{4x}$
7. Найти площадь сферы, если радиус сферы равен 8 дм.

ЗАДАНИЕ 2 (дополнительное, оценивается дополнительно в 1 балл при выполнении 1-го задания состоит из 2 вопросов)

1. Вычислите $log_{\frac{1}{3}}\left(2tg\frac{\pi}{6}\right)+log_{\frac{1}{3}}\left(1-tg^2\frac{\pi}{6}\right)^{-1}$
2. Решите уравнение $tg^2x-3tgx-4=0$

ЗАДАНИЕ 3 (усложненное, оценивается при выполнении первых двух как отличный результат состоит из 1 вопроса)

1. Докажите тождество $\frac{cos2x}{sinx\,cosx+sin^2x}=ctg(\pi+x)-1$

Критерии оценки:

- оценка «отлично» выставляется студенту, если он выполняет 3 задания;

- оценка «хорошо» выставляется студенту, если он выполняет 1 и 2 задание;
- оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он выполняет задание 1;
- оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если он не выполняет ни одного задания.

Преподаватель_______ ___________ Зав. кафедрой _________ ___________
(подпись) (ФИО) (подпись)
(ФИО)

5. Задания открытого и закрытого типа для проверки остаточных знаний

<u>Задания закрытого типа</u>

1. Множество - это

1. совокупность объектов;
2. слишком много;
3. совокупность объектов, объединённых по некоторому признаку;
4. совокупность объектов, обладающих свойствами.

Правильный ответ: 3

2. Укажите верные утверждения

1. При операциях на числовых множествах за универсальное множество берут множество целых чисел.
2. Множество чётных чисел - это счётное множество.
3. Пересечение двух множеств всегда не пусто.
4. Основные операции над множествами: пересечение, объединение, разность, симметрическая разность.
5. Пустое множество - это конечное множество.
Правильный ответ: 2,4,5

3. Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется

2 отношение противолежащего катета к прилежащему;
3 отношение прилежащего катета к гипотенузе;
4 отношение гипотенузы к прилежащему катету;
5 отношение противолежащего катета к гипотенузе.
Правильный ответ: 4

4. Установите соответствие

1. рациональное уравнение — а. $\sqrt[3]{x-4}=3.$

2. иррациональное уравнение — б. $\sin\frac{\pi x}{3}=0,5.$

3. тригонометрическое уравнение в. $\frac{9}{x^2-16}=1.$

Правильный ответ: 1-в, 2-а, 3-б

5. Достаточным условием убывания функции f(x) является ….

1. f '(x) > 0;
2. f '(x) < 0;
3. f ''(x) > 0;
4. f ''(x) < 0;

Правильный ответ: 2

<u>Задания открытого типа</u>

1. Найдите производную функции y = *tg x в точке x=0.*
Правильный ответ: 1

2. Найдите корень уравнения $(x-1)^3=8.$
Правильный ответ: 3

3. Найти производную заданной функции $y=4x+e-\sin x$
Правильный ответ: $4-\cos x$

4. Вероятность любого события есть неотрицательное число, не превосходящее числа ____.
Правильный ответ: 1

5. Неопределённый интеграл функции *f(x) = 2 sinx* имеет вид ________.
Правильный ответ: $-2\cos x+C$

6. В урне 200 билетов. Из них 10 выигрышных. Вероятность того, что первый вынутый билет окажется выигрышным, равна ____.
Правильный ответ: 0,05

7. Найдите значение выражения $(432^2-568^2):1000.$
Правильный ответ: -136

8. Вероятность того, что новая шариковая ручка пишет плохо или вовсе не пишет, равна 0,21. Покупатель, не глядя, берёт одну шариковую ручку из коробки. Найдите вероятность того, что эта ручка пишет хорошо.
Правильный ответ: 0,79

9. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному _______________

Правильный ответ: выражению

10. Вероятность того, что произойдет одно из двух несовместных событий, равна _________ вероятностей этих событий.

Правильный ответ: сумме

11. Точки максимума и минимума функции называются точками __________.

Правильный ответ: экстремума

12. Найдите корень уравнения $1+8(3x+7)=9.$

Правильный ответ: -2

13. Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже чем 36,8 °С, равна 0,81. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура окажется 36,8 °С или выше.

Правильный ответ: 0,19

14. В треугольнике *ABC* $AC=BC=25, \quad AB=40.$ **Найдите** $\sin A.$

Правильный ответ: 0,6

15. Совокупность всех первообразных функции *y = f(x)* называется ______________________.

Правильный ответ: неопределенным интегралом

Вопросы для промежуточной аттестации

Вопрос №1.

Дайте определения: а) корня степени n из числа a; б) арифметического корня степени n из неотрицательного числа a.

Ответ.

Корнем степени n ($n = 2; 3; 4; \ldots$) из числа a называется число, n-я степень которого равна a.

Корень второй степени иначе называется квадратным, третьей — кубическим.

Арифметическим корнем степени n из неотрицательного числа a называется такое неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Обозначение $\sqrt[n]{a}$ используется для арифметического корня чётной степени и для корня нечётной степени.

По определению $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, где $a \le 0$; $m \in Z$; $n \le N$.

Задачи.

1. **Вычислить.**

а) $3^7 \cdot 3^{-2}$; б) $5^{-3} : 5^{-6}$

Решение.

а) $3^7 \cdot 3^{-2} = 3^{7-2} = 3^5 = 243$;

б) $5^{-3} : 5^{-6} = 5^{-3+6} = 5^3 = 125$

2. **Выполнить преобразования.**

а) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{432}$; б) $\sqrt[3]{-\dfrac{27}{125}}$

Решение.

а) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{432} = \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{2^4 \cdot 3^3} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3^4} = 2 \cdot 3 = 6$;

б) $\sqrt[3]{-\dfrac{27}{125}} = \dfrac{\sqrt[3]{-27}}{\sqrt[3]{125}} = -\dfrac{3}{5}$;

Представить в виде степени:

$\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[5]{x^2} : \sqrt[7]{x^3}$.

3. **Представить в виде степени.**

Решение.

$$\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[5]{x^2} : \sqrt[7]{x^3} = x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{5}} : x^{\frac{3}{7}} = x^{\frac{1}{3}+\frac{2}{5}-\frac{3}{7}} = x^{\frac{32}{105}}.$$

Вопрос №2.

Какие свойства у корня степени n из числа a?

Ответ.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a;$$

$\sqrt[n]{a^n} = a$, если n нечётно; $\sqrt[n]{a^n} = |a|$, если n чётно ($|x| = -x$, если $x < 0$; $|x| = x$, если $x \le 0$);

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab};$$

$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, где $a \le 0$, $b > 0$ при чётном n; $b \ne 0$ при нечётном n;

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k};$$

$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} \ (a \le 0;\ k \in N);$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

Задачи.

1. Вычислить.

$\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$.

Решение.

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(-\frac{3}{2}\right)^{3} = \frac{(-3)^3}{2^3} = -\frac{27}{8}.$$

2. Упростить.

$\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{6}{5}} : (xy^6)^{\frac{1}{3}}$.

Решение.

$$\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{6}{5}} : (xy^6)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}} : \left(x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{6\cdot\frac{1}{3}}\right) = \frac{x^{\frac{4}{5}}}{x^{\frac{1}{3}} \cdot y^2} = \frac{x^{\frac{4}{5}-\frac{1}{3}}}{y^2} = \frac{x^{\frac{7}{15}}}{y^2}.$$

3. Вынести множитель из-под знака корня.

а) $\sqrt[4]{3^7}$; б) $\sqrt{45}$

Решение.

а) $\sqrt[4]{3^7} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 3^3} = 3\sqrt[4]{3^3} = 3\sqrt[4]{27}$;

б) $\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$

Вопрос №3.
Дайте определения: логарифма числа b по основанию a, десятичного логарифма и натурального логарифма.

Ответ.

Пусть $a > 0$; $b > 0$, причём $a \neq 1$.

Логарифмом числа b по основанию a называется такое число c, что $a^c = b$:

$$c = \log_a b, \text{ если } a^c = b.$$

Десятичным логарифмом называется логарифм по основанию 10:

$$c = \lg b, \text{ если } 10^c = b.$$

Натуральным логарифмом называется логарифм по основанию e, где число $e \approx 2{,}718$:

$$c = \ln b, \text{ если } e^c = b.$$

Задачи.

1. **Вычислить.**

$$\log_2 64 - 3\log_{\frac{1}{3}} 27$$

Решение.

а) $64 = 2^6$; значит, $\log_2 64 = 6$; $27 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$;

значит, $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$;

$$\log_2 64 - 3\log_{\frac{1}{3}} 27 = 6 - 3\cdot(-3) = 15$$

2. **Вычислить.**

$4^{\log_2 3}$.

Решение.

$$4^{\log_2 3} = (2^2)^{\log_2 3} = (2^2)^{\log_{2^2} 3^2} = 3^2 = 9.$$

3. **Вычислить**

$\log_4 \sqrt{2}$

Решение.

$$\log_4 \sqrt{2} = \log_{2^2} 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Вопрос №4.
Какие свойства логарифма вы знаете?
Ответ.

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b.$$

Логарифм произведения, частного, степени, корня:

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c;$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c;$$

$$\log_a b^p = p \cdot \log_a b;$$

$$\log_a \sqrt[p]{b} = \frac{1}{p} \cdot \log_a b;$$

$$\log_{a^p} b = \frac{1}{p} \cdot \log_a b;$$

$$\log_{a^p} b^p = \log_a b; \ \log_{a^p} a^q = \frac{q}{p}.$$

Задачи.

1. **Вычислить**

$\log_{12} 8 + \log_{12} 3 + \log_{12} 6.$

Решение.

$\log_{12} 8 + \log_{12} 3 + \log_{12} 6 = \log_{12}(8 \cdot 3 \cdot 6) = \log_{12} 144 = 2.$

2. **Вычислить**

$\log_{\frac{1}{3}} 54 - \log_{\frac{1}{3}} 6.$

Решение.

$$\log_{\frac{1}{3}} 54 - \log_{\frac{1}{3}} 6 = \log_{\frac{1}{3}} \frac{54}{6} = \log_{\frac{1}{3}} 9 = -2.$$

3. **Вычислить.**

$\log_{\sqrt{5}} \sqrt[5]{25}.$

Решение.

$$\log_{\sqrt{5}} \sqrt[5]{25} = \log_{5^{\frac{1}{2}}} 25^{\frac{1}{5}} = 2 \cdot \log_5 25^{\frac{1}{5}} = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \log_5 25 =$$

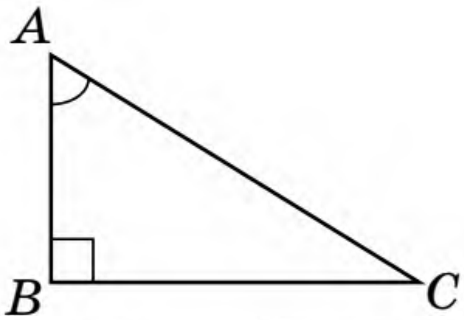
$$= \frac{2}{5} \cdot 2 = \frac{4}{5}.$$

Вопрос №5.

Дайте определения синуса и косинуса острого угла.

Ответ.

Прямоугольный треугольник ABC — треугольник, в котором один угол равен $90°$



Синусом острого угла A в прямоугольном треугольнике называется отношение противолежащего катета к гипотенузе:

$$\sin \angle A = \frac{BC}{AC}.$$

Косинусом острого угла A в прямоугольном треугольнике называется отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos \angle A = \frac{AB}{AC}.$$

Задачи.

1. **Упростить.**

$$2 + \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha.$$

Решение.

$$2 + \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha =$$
$$= 2 + \cos^2 \alpha - 2(1 - \cos^2 \alpha) =$$
$$= 2 + \cos^2 \alpha - 2 + 2 \cos^2 \alpha = 3 \cos^2 \alpha.$$

2. **Известно, что**

$$\cos \alpha = 0{,}8; \ \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi.$$

Найти: $\sin\alpha$; $\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}\alpha$.

Решение.

Поскольку угол α лежит в IV четверти,

$\sin\alpha < 0$.

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-0,64} = -0,6;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{0,6}{0,8} = -\frac{3}{4}; \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{4}{3}.$$

3. Вычислить:

$$\cos\frac{10\pi}{3}\cdot\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} - \sin\frac{5\pi}{6}.$$

Решение.

По формулам приведения:

$$\cos\frac{10\pi}{3}\cdot\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} - \sin\frac{5\pi}{6} =$$

$$= \cos\left(\pi + 2\pi + \frac{\pi}{3}\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= -\cos\frac{\pi}{3}\cdot\left(-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\right) - \sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6} =$$

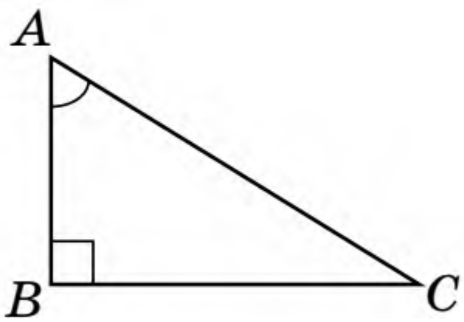
$$= \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{2} = 0$$

Вопрос №6.

Дайте определения тангенса и котангенса острого угла и определения тригонометрических функций числа х.

Ответ.

Прямоугольный треугольник ABC — треугольник, в котором один угол равен 90°



Тангенсом угла A в прямоугольном треугольнике называется отношение противолежащего катета к прилежащему:

$$\operatorname{tg} \angle A = \frac{BC}{AB}.$$

Котангенсом угла A в прямоугольном треугольнике называется отношение прилежащего катета к противолежащему:

$$\operatorname{ctg} \angle A = \frac{AB}{BC}.$$

Синусом (косинусом, тангенсом, котангенсом) числа x называется синус (косинус, тангенс, котангенс) угла, равного x радиан.

Задачи.

1. **Известно, что**

$\operatorname{tg} \alpha = -2;\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Найти:

$\sin \alpha;\ \cos \alpha;\ \operatorname{ctg} \alpha$.

Решение.

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{1}{2};\ 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha};$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + 4 = 5;\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{5};$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

Поскольку угол α лежит во II четверти, $\sin \alpha > 0$; $\cos \alpha < 0$.

Значит, $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

2. **Упростить выражение:**

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) - \cos(\alpha - \pi) + \operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right).$$

Решение.

$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha)-\cos(\alpha-\pi)+\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)=$$

$$=-\operatorname{tg}\alpha+\cos\alpha+\operatorname{ctg}\left(2\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$$

$$=-\operatorname{tg}\alpha+\cos\alpha+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$$

$$=-\operatorname{tg}\alpha+\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha=\cos\alpha$$

3. **Вычислить:**

$$\cos 74^\circ\cdot\cos 14^\circ+\sin 74^\circ\cdot\sin 14^\circ;$$

Решение.

$$\cos 74^\circ\cdot\cos 14^\circ+\sin 74^\circ\cdot\sin 14^\circ=$$

$$=\cos(74^\circ-14^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

Вопрос №7.

Напишите формулы синуса, косинуса и тангенса суммы двух углов.

Ответ.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$

Задачи.

1. **Вычислить:**

$$\operatorname{tg} 15^\circ;$$

Решение.

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ} =$$

$$= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{\left(3 - \sqrt{3}\right)^2}{\left(3 + \sqrt{3}\right) \cdot \left(3 - \sqrt{3}\right)} =$$

$$= \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = 2 - \sqrt{3};$$

2. Вычислить:

$(\sin 15^\circ + \cos 15^\circ)^2.$

Решение.

$$(\sin 15^\circ + \cos 15^\circ)^2 =$$
$$= \sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ + 2 \sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ =$$
$$= 1 + \sin 30^\circ = 1 + \frac{1}{2} = 1,5.$$

3. Вычислить:

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}.$$

Решение.

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Вопрос №8.

Напишите формулы сокращённого умножения.

Ответ.

$$(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2;$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2\text{b} + 3ab^2 \pm b^3;$$

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3.$$

Задачи.

1. Упростить выражение:

$$\left(\frac{a + b}{a - b} - \frac{a - b}{a + b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right).$$

Решение.

$$\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)\cdot(a+b)}\cdot\frac{a^2-b^2}{ab}=$$

$$=\frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{a^2-b^2}{ab}=\frac{4ab(a^2-b^2)}{ab(a^2-b^2)}=4.$$

2. Вынести множитель из-под знака корня:

$$\sqrt[5]{a^{23}\cdot b^{17}}.$$

Решение.

$$\sqrt[5]{a^{23}\cdot b^{17}}=\sqrt[5]{a^{20}\cdot b^{15}\cdot a^3\cdot b^2}=\sqrt[5]{(a^4)^5\cdot(b^3)^5\cdot a^3\cdot b^2}=$$

$$=a^4\cdot b^3\cdot\sqrt[5]{a^3\cdot b^2}.$$

3. Избавиться от корня в знаменателе:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{7}}.$$

Решение.

$$\frac{3}{\sqrt[3]{7}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7\cdot 7^2}}=\frac{3\sqrt[3]{49}}{\sqrt[3]{7^3}}=\frac{3\sqrt[3]{49}}{7}.$$

Вопрос №9.
Дайте определение и основные свойства модуля числа.

Ответ.

$$|a|=\begin{cases}a, \text{ если } a\geqslant 0;\\ -a, \text{ если } a<0.\end{cases}$$

$$|a|=\sqrt{a^2};\ |a|=\sqrt[2n]{a^{2n}}\ (n\in N);$$

$$|a|>0, \text{ если } a\neq 0;$$

$$|x|\le a \text{ тогда и только тогда, когда } -a\le x\le a;$$

$$|a\pm b|\le|a|+|b|;$$

$$||a|-|b||\le|a\pm b|;$$

$$|ab|=|a|\le|b|;$$

$$|a^n|=|a|^n;$$

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}.$$

Задачи.

1. **Доказать тождество:**

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Решение.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{2\alpha}{2}}{1+\cos\frac{2\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

2. **Упростить:**

$$\sqrt{a^2-6a+9}+\sqrt{a^2+6a+9}$$

Решение.

$$\sqrt{a^2-6a+9}+\sqrt{a^2+6a+9}=$$

$$=\sqrt{a^2-2\cdot3\cdot a+3^2}+\sqrt{a^2+2\cdot3\cdot a+3^2}=$$

$$=\sqrt{(a-3)^2}+\sqrt{(a+3)^2}=|a-3|+|a+3|.$$

3. **Решить уравнение:**

$$3x^2-4=0.$$

Решение.

$$x^2=\frac{4}{3};\ x_{1;2}=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}=\pm\sqrt{\frac{4\cdot3}{3\cdot3}}=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Вопрос №10.

Сформулируйте прямую и обратную теоремы Виета.

Ответ.

Теорема Виета:

Если x_1, x_2 — корни уравнения

$$ax^2+bc+c=0,$$

то $x_1+x_2=-\frac{b}{a};\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$

Обратная теорема Виета:

Если $x_1+x_2=-p$; $x_1\cdot x_2=q$, то приведённое квадратное уравнение с корнями x_1, x_2 имеет вид:

$$x_2+px+q=0.$$

Задачи.

1. **Решить уравнение:**

$$2x^2 + 3x = 0.$$

Решение.

$$x \cdot (2x + 3) = 0;\ x_1 = 0;\ 2x^2 + 3 = 0;\ x_2 = -1{,}5.$$

2. Решить уравнение:

$$(x - 2)^3 \cdot (x + 3)^5 = 0.$$

Решение.

ОДЗ: $x \in (-\infty; +\infty)$.

$(x - 2)^3 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2;$

$(x + 3)^5 = 0 \Leftrightarrow x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3.$

Ответ. $2;\ -3.$

3. Решить уравнение:

$$4x^4 - 5x^2 + 1 = 0.$$

Решение.

Обозначим $t = x^2$.

$4t^2 - 5t + 1 = 0.$

$$t_{1;2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{8} = \frac{5 \pm 3}{8};$$

$$t_1 = \frac{5 - 3}{8} = \frac{1}{4};\ t_2 = \frac{5 + 3}{8} = 1.$$

$$x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x_{1;2} = \pm\frac{1}{2};\ x_2 = 1 \Leftrightarrow x_{3;4} = \pm 1.$$

Ответ. $\pm\frac{1}{2};\ \pm 1.$

Вопрос №11.

Какое уравнение называется квадратным? Какой вид имеет формула корней квадратного уравнения?

Ответ.

Квадратное уравнение:

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0.$$

Корни квадратного уравнения:

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

где $D = b^2 - 4ac$.

Если b — чётное число, то корни удобно искать по формуле

$$x_{1;2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}.$$

Задачи.

1. **Решить уравнение:**

$$3x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Решение.

Поскольку $b = -4$ — чётно,

$$x_{1;2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-3}}{3} = \frac{2 \pm 1}{3};\ x_1 = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3};\ x_2 = \frac{2+1}{3} = 1.$$

2. **Решить уравнение:**

$$\frac{x^2}{x+2} + \frac{x+2}{x^2} = 2.$$

Решение.

ОДЗ: $x \neq -2$; $x \neq 0$. Обозначим $t = \dfrac{x^2}{x+2}$.

Тогда $\frac{x+2}{x^2} = \frac{1}{t}$: $t + \frac{1}{t} = 2$; $\frac{t^2+1}{t} = 2$;

$t^2 + 1 = 2t$; $t^2 - 2t + 1 = 0$;

$t_{1;2} = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1 \pm 0 = 1.$

$\frac{x^2}{x+2} = 1$; $x^2 = x + 2$; $x^2 - x - 2 = 0$;

$x_{1;2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$;

$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1$; $x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$ — входят в ОДЗ.

Ответ. −1; 2.

3. Решить уравнение:

$\sqrt{x+5} + \sqrt{13-x} = 6.$

Решение.

Изолируем один из корней:

$\sqrt{x+5} = 6 - \sqrt{13-x}.$

Возведём обе части в квадрат:

$x + 5 = 36 - 12\sqrt{13-x} + 13 - x$; $2x - 44 = 12\sqrt{13-x}$;

$x - 22 = 6\sqrt{13-x}.$

Ещё раз возведём в квадрат:

$x^2 - 44x + 484 = 468 - 36x$; $x^2 - 8x + 16 = 0$;

$x_{1;2} = 4 \pm \sqrt{16-16} = 4 \pm 0 = 4.$

Проверка: $\sqrt{4+5} + \sqrt{13-4} = \sqrt{9} + \sqrt{9} = 3 + 3 = 6.$

Ответ. 4.

Вопрос №12.

Напишите формулы для корней уравнений sin x=a и cos x=a.

Ответ.

1) sin *x* = *a*.

Уравнение имеет решение только при $|a| \le 1$:

$$x = (-1)^n \cdot \arcsin a + \pi n,\ n \in Z.$$

В частности, при $a = 0$: $x = \pi n,\ n \in Z$;

при $a = 1$: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$;

при $a = -1$: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.

2) cos *x* = *a*.

Уравнение имеет решение только при $|a| \le 1$:

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z.$$

В частности, при $a = 0$: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$;

при $a = 1$: $x = 2\pi n,\ n \in Z$;

при $a = -1$: $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$.

Задачи.

1. Решить уравнение:

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решение.

$$2x + \frac{\pi}{3} = (-1)^n \cdot \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$2x + \frac{\pi}{3} = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$2x = -\frac{\pi}{3} + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$x = ((-1)^n - 1) \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$$

2. Решить уравнение:

$$\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Решение.

$$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;\ \frac{x}{2}=\frac{3\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z;$$

$$x=\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$$

3. Решить уравнение:

$$\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Решение.

$$x+\frac{\pi}{4}=\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{3}}{3}+\pi n,\ n\in Z;\ x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z;$$

$$x=-\frac{\pi}{12}+\pi n,\ n\in Z.$$

Вопрос №13.

Какое уравнение называется показательным? При каких условиях показательное уравнение имеет решение? Какой вид имеет решение показательного уравнения?

Ответ.

$$a^x=b.$$

Уравнение имеет решение только при $a>0;\ a\neq 1;\ b>0$:

$$x=\log_a b.$$

Задачи.

1. Решить уравнение:

$$2^{\sqrt{x}}=3.$$

Решение.

$$\sqrt{x}=\log_2 3;\ x=(\log_2 3)^2.$$

2. Решить уравнение:

$$2^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1}.$$

Решение.

$$2^x=2^{-(2x-1)};\ x=-(2x-1);$$

$$x = 1 - 2x;\ 3x = 1;\ x = \frac{1}{3}.$$

3. **Решить уравнение:**

$$\log_{\frac{1}{3}} x = -2.$$

Решение.

$$x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9.$$

Вопрос №14.

Какие виды неравенств вы знаете?

Ответ.

Линейное неравенство — это неравенство, которое содержит только линейные функции ($ax + b$) от неизвестной переменной.

Квадратное неравенство содержит квадратичные функции ($ax^2 + bx + c$) от переменной.

Рациональное неравенство содержит только рациональные функции (частные многочленов) от переменной.

Показательные неравенства содержат переменную (или выражение от переменной) в показателе степени.

Логарифмические неравенства содержат переменную (или выражение от переменной) под знаком логарифма или в его основании.

Задачи.

1. **Решить неравенство:**

$$3x + 5 \le 12x + 3.$$

Решение.

$$3x + 5 \le 12x + 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (3x + 5) - (12x + 3) \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -9x + 2 \le 0 \Leftrightarrow 9x - 2 \ge 0 \Leftrightarrow 9x \ge 2 \Leftrightarrow x \ge \frac{2}{9}.$$

2. **Решить неравенство:**

$x^2 + x + 1 > 2x + 3.$

Решение.

$x^2 + x + 1 - 2x - 3 > 0;\ x^2 - x - 2 > 0;\ a = 1 > 0.$

Решаем уравнение $x^2 - x - 2 = 0;\ x_1 = -1;\ x_2 = 2;$

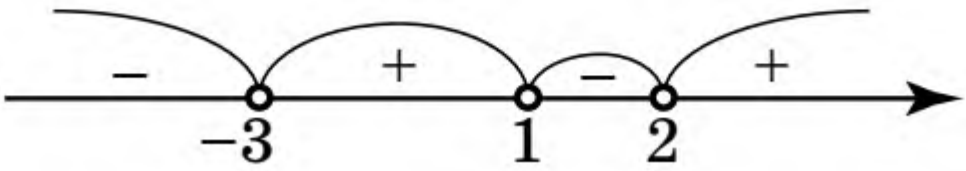
$x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty).$

3. Решить неравенство:

$(x - 2)(x - 1)(x + 3) < 0.$

Решение.

Нанесём на ось точки, в которых сомножители обращаются в ноль:



При $x = 0$: $(x - 2)(x - 1)(x + 3) = 6 > 0.$

Поэтому на интервале $(-3; 1)$ левая часть положительна (знак «+»). Расставляем знаки на остальных интервалах (они чередуются). Знак «–» соответствует интервалам $(-\infty; -3)$ и $(1; 2)$; $x \in (-\infty; -3) \cup (1; 2).$

Вопрос №15.

Дайте определение функции и аргумента.

Ответ.

Функция — это закономерность, отражающая связь между элементами множеств. Величина y называется функцией величины x, если каждому значению x из некоторого числового множества, называемого областью определения функции, соответствует единственное значение величины y.

Величина x называется **аргументом**, или независимой переменной, а элементы области определения — **допустимыми значениями аргумента.**

Коротко слова «величина y есть функция величины x» записывают так:

$$y = f(x).$$

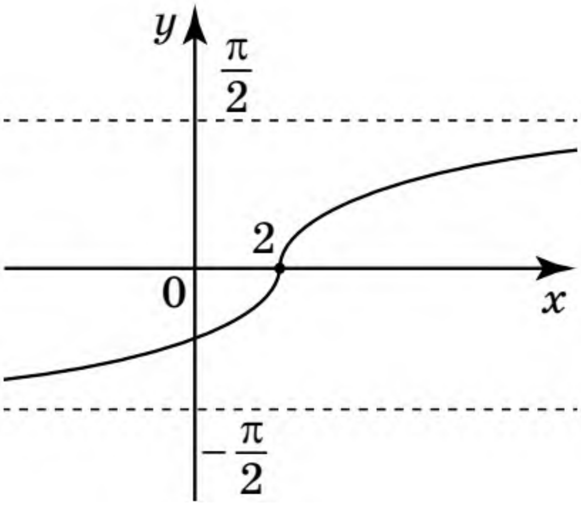
Задачи.

1. Построить график функции

$y = \operatorname{arctg}(2x - 4)$.

Решение.

Поскольку $y = \operatorname{arctg} 2(x - 2)$, график можно получить из графика $y = \operatorname{arctg} x$ сжатием в 2 раза к оси Oy и сдвигом на 2 единицы вправо

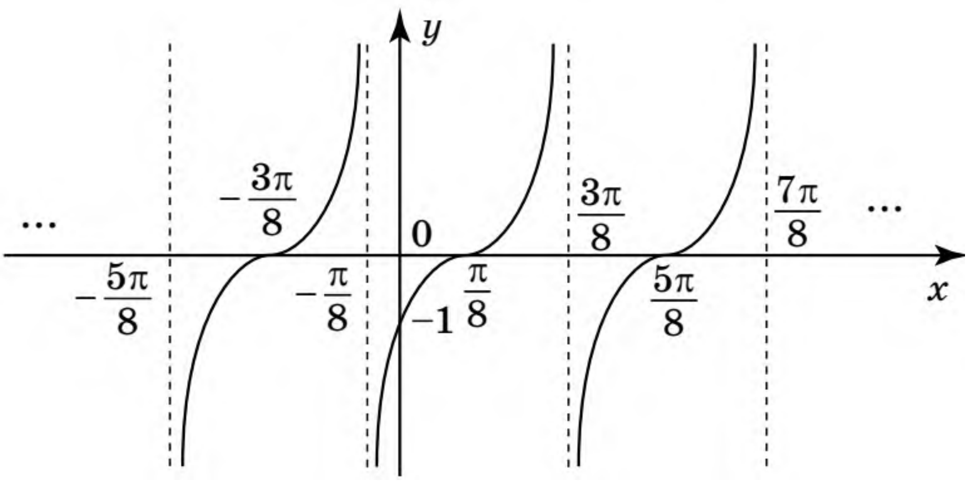


2. Построить график функции

$$y = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Решение.

График функции $y = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} 2\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$ получается из графика $y = \operatorname{tg} x$ сжатием в 2 раза к оси Oy и сдвигом на $\frac{\pi}{8}$ вправо

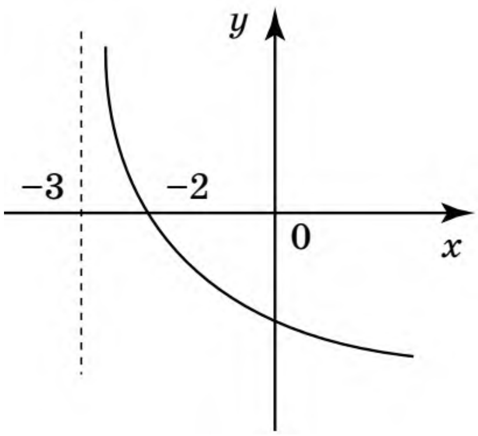


3. Построить график функции:

$y = \log_{\frac{1}{2}}(x+3).$

Решение.

Для построения графика необходимо сдвинуть на 3 единицы влево график функции $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.



Вопрос №16.

Дайте определения предела и производной функции.

Ответ.

Число a называется **пределом функции** $f(x)$ при x, стремящемся к x_0, $a = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, что из неравенства $0 < |x - x_0| < \delta$ вытекает $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции в точке x_0 к приращению аргумента, если приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

или

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Задачи.

1. Найти производную функции:

$$y(x) = x^2 \cdot \ln x;$$

Решение.

$$y'(x) = (x^2)' \cdot \ln x + x^2 \cdot (\ln x)' = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= 2x \ln x + x = (2 \ln x + 1) \cdot x$$

2. Найти производную функции:

$$y(x) = \frac{x+1}{3x^2+2};$$

Решение.

$$y'(x) = \frac{(x+1)' \cdot (3x^2+2) - (x+1) \cdot (3x^2+2)'}{(3x^2+2)^2} =$$

$$= \frac{3x^2 + 2 - 6x(x+1)}{(3x^2+2)^2} = -\frac{3x^2+6x-2}{(3x^2+2)^2}.$$

3. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int_{-2}^{3} x^2 dx; \text{ б) } \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (x - \sin 2x) dx.$$

Решение.

$$\text{а) } \int_{-2}^{3} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{3} = \frac{3^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = 9 + \frac{8}{3} = \frac{35}{3};$$

$$\text{б) } \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (x - \sin 2x) dx = \left.\left(\frac{x^2}{2} + \frac{\cos 2x}{2}\right)\right|_{0}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{\pi^2}{8} - 1.$$

Вопрос №17.

Дайте определение координат вектора, суммы двух векторов и произведения вектора на число.

Ответ.

Координатами вектора с началом в точке $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и концом в точке $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$
называются числа $x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1$.
Суммой векторов $\bar{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ и $\bar{b}(b_1;\ b_2;\ b_3)$ называется вектор $\bar{c}(a_1 + b_1;\ a_2 + b_2;\ a_3 + b_3)$.

Произведением вектора $\bar{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ *на число* λ называется вектор $\lambda\bar{a} = \overline{(\lambda a_1;\ \lambda a_2;\ \lambda a_3)}$.

Задачи.

1. Даны три точки $A\ (1;\ 0;\ 1)$, $B\ (-1;\ 1;\ 2)$, $C\ (0;\ 2;\ -1)$. Найдите точку $D(x;\ y;\ z)$, если известно, что: а) векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны; б) сумма векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равна нулевому вектору.

Решение.

1. $\overline{AB} = \overline{((-1-1);(1-0);(2-1))} = \overline{(-2;\ 1;\ 1)}$.

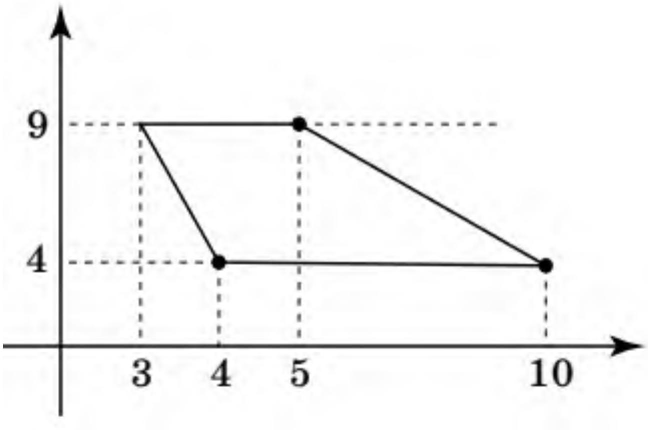
2. $\overline{CD} = \overline{((x-0);(y-2);(z+1))} = \overline{(x;\ y-2;\ z+1)}$.

а) $\overline{CD} = \overline{AB}$ означает, что $x = -2$, $y - 2 = 1$, $z + 1 = 1$; таким образом, искомая точка $D\ (-2;\ 3;\ 0)$;

б) $\overline{AB} + \overline{CD} = \bar{0}$ означает, что $x - 2 = 0$, $x = 2$; $(y - 2) + 1 = 0$, $y = 1$; $(z + 1) + 1 = 0$, $z = -2$; следовательно, $D(2;\ 1;\ -2)$.

2.

Найти площадь трапеции, вершины которой имеют координаты: (4; 4); (10; 4); (5; 9); (3; 9)



Решение.

Площадь трапеции равна

$$S = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h,$$

где a, b — стороны, h — высота.

$a = 5 - 3 = 2$; $b = 10 - 4 = 6$; $h = 9 - 4 = 5$

$$S = \frac{1}{2} \cdot (2 + 6) \cdot 5 = 20.$$

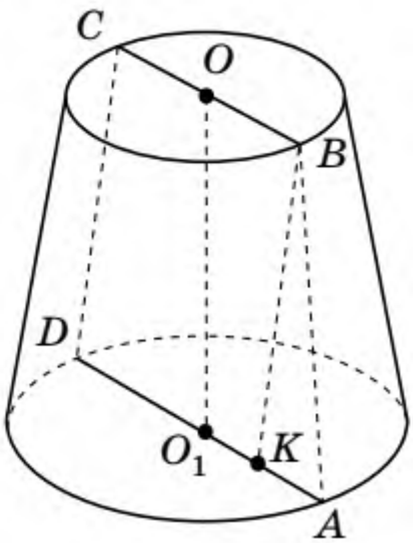
3. Радиусы оснований усечённого конуса равны 7 см и 4 см, а образующая — 5 см. Найти расстояние между диаметрами оснований.

Решение.

Общим перпендикуляром двух диаметров оснований является отрезок OO_1, где O и O_1 — центры оснований.

Пусть $ABCD$ — осевое сечение. $AO_1 = 7$; $BO = 4$; $AB = 5$.

$ABCD$ — равнобокая трапеция. Проведём $BK \perp AD$, тогда $BK = OO_1$ (рис. 16.15).



Из прямоугольного ΔABK:

$$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} =$$

$$= \sqrt{AB^2 - (AO_1 - BO)^2} =$$

$$= \sqrt{5^2 - (7-4)^2} = 4.$$

$OO_1 = BK = 4$.

Ответ. 4 см.

Вопрос №18.

Что называется многогранником?

Что называется диагональю многогранника?

Какой многогранник называется выпуклым?

Ответ.

Многогранник — это такое тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников.

Отрезок, соединяющий две вершины, не лежащие в одной грани, называется *диагональю* многогранника.

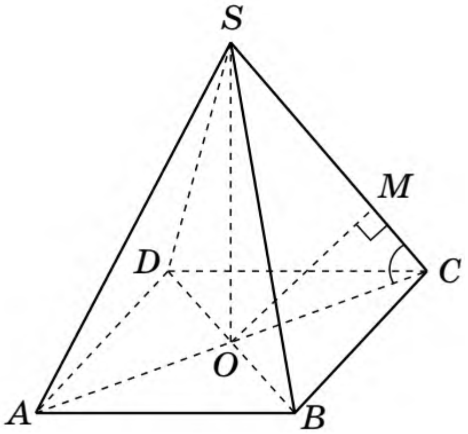
Диагональной плоскостью куба называется плоскость, проходящая через два боковых ребра куба, не лежащих в одной грани. Сечение, полученное от пересечения диагональной плоскости с гранями куба, называется *диагональным сечением*.

Многогранник называется *выпуклым*, если он весь расположен по одну сторону от каждой из его граней.

Задачи.

1. Расстояние от

основания высоты правильной четырёхугольной пирамиды до её бокового ребра равно a, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол α. Найти боковое ребро.



Решение.

$SO \perp (ABCD)$, OC — проекция бокового ребра на плоскость $(ABCD)$, $\angle SCO = \alpha$. Проведём $OM \perp SC$; $OM = a$.

Из ΔOMC: $OC = \dfrac{a}{\sin\alpha}$.

Так как $SO \perp (ABCD)$, $SO \perp OC$.

Из ΔSOC:

$$SC = \frac{OC}{\cos\angle SCO} = \frac{a}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2a}{\sin 2\alpha}.$$

2. В сферу вписан конус, образующая которого равна l, а угол при вершине осевого сечения равен $60°$. Найти площадь сферы.

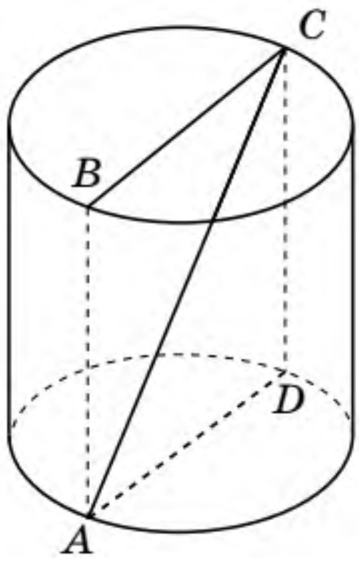
Решение. Площадь сферы найдём по формуле $S = 4\pi r^2$, где r — радиус сферы.

Поскольку в сферу вписан конус, проведём сечение через вершину конуса, которое будет равнобедренным треугольником. Поскольку угол при его вершине равен $60°$, то треугольник равносторонний. Следовательно, радиус сферы равен радиусу окружности, описанной вокруг равностороннего треугольника. Сторона треугольника равна l. Тогда $R = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot l$. Значит, $S = 4\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot l\right)^2 = \frac{4}{3}\pi l^2$.

3.

Диагональ осевого сечения цилиндра равна 12 см и образует с плоскостью нижнего основания угол $45°$. Найти объём цилиндра.

Решение. Поскольку основание осевого сечения образует с высотой цилиндра прямой угол, то треугольник ADC, образованный диагональю осевого сечения, высотой цилиндра и его диаметром (рис. 16.9), — прямоугольный. Значит, $\angle ACD = 45°$ (т. к. $\angle CAD = 45°$).



Таким образом, ΔADC равнобедренный. Значит, $AD = DC$. По теореме Пифагора:

$AD_2 + DC_2 = 122$; $AD_2 = DC_2 = 72$;

$AD = DC = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.

Вопрос №19.

Дайте классическое и статистическое определение вероятности.

Ответ.

Классическое определение вероятности:
Пусть при испытании возможно конечное число элементарных исходов. **Вероятностью** события A называется отношение числа элементарных исходов, благоприятствующих событию A (при которых A наступает), к общему числу элементарных исходов.
Вероятность невозможного события равна 0, вероятность достоверного события равна 1. Вероятность любого события заключена между 0 и 1.

Статистическое определение вероятности:
Пусть n — количество испытаний в некоторой серии испытаний, m — количество тех испытаний, в которых произошло событие A. Отношение $\frac{m}{n}$ называется **относительной частотой** события A в данной серии испытаний. Известно, что при больших значениях n относительные частоты в разных сериях испытаний практически совпадают и колеблются около некоторого числа $P(A)$, которое называют статистической вероятностью события A.

Задачи.

1.

Ученик знает ответы на 20 из 30 вопросов программы. С какой вероятностью он ответит на два наугад заданных вопроса?

Решение.

Общее количество элементарных исходов испытания (заданы два вопроса) равно C_{30}^2, количество благоприятствующих исходов равно C_{20}^2. Таким образом,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{20}^2}{C_{30}^2} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 2}{2 \cdot 30 \cdot 29} = \frac{38}{87}.$$

2.

В кодовом замке 10 кнопок, и он открывается одновременным нажатием трёх кнопок. Сколько существует возможных кодов для такого замка?

Решение.

$$C_{10}^{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

3.

Поезда в метро в часы пик идут с интервалом 2 минуты. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени. С какой вероятностью ему придётся ждать не менее 1,5 минут?

Решение.

Время ожидания — любое число из отрезка [0; 2]. Требуется определить вероятность того, что

оно попало на отрезок [1,5; 2]. В силу определения геометрической вероятности:

$$P(A) = \frac{2 - 1,5}{2 - 0} = \frac{0,5}{2} = 0,25.$$

Вопрос №20.

Напишите формулы для определения относительной частоты и среднего значения выборки.

Ответ.

Относительная частота значения x_i:

$$p_i = \frac{n_i}{n},$$

где n_i — частота x_i, n — объём выборки.

Среднее значение выборки:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

где x_k ($k = 1, \ldots, n$) — все значения выборки, n — объём выборки.

Задачи.

1.

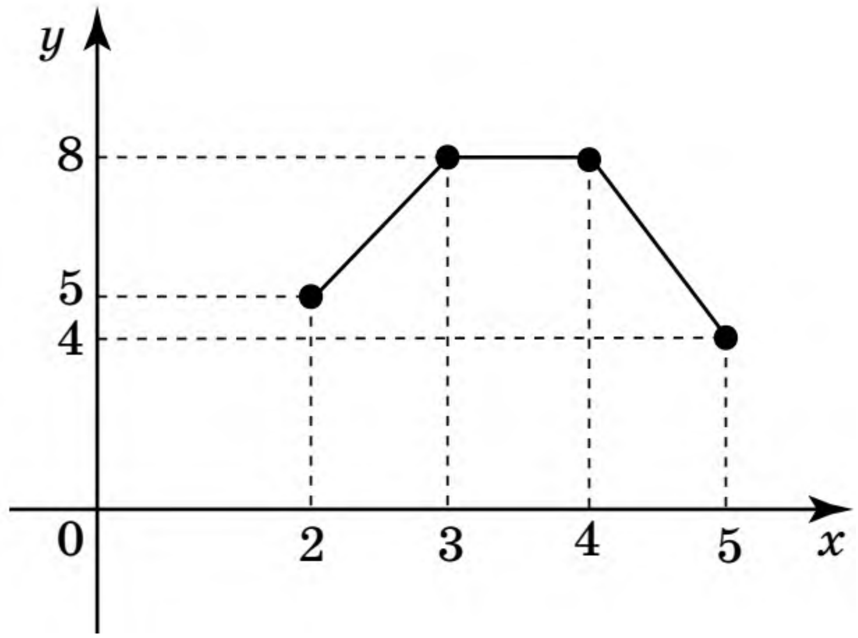
При контроле знаний в классе 25 ученикам были поставлены следующие оценки: 2; 3; 4; 3; 4; 5; 3; 5; 2; 4; 3; 3; 4; 4; 2; 5; 2; 4; 3; 4; 4; 3; 2; 5; 3. Составить статистическое распределение, полигон частот, найти выборочное среднее, моду и медиану распределения.

Решение.

Сгруппируем данные и разместим их в порядке возрастания признака (т. е. оценки): «2» — 5; «3» — 8; «4» — 8; «5» — 4; $n = 25$.

x_i	2	3	4	5
n_i	5	8	8	4

Построим полигон частот.



Выборочное среднее:

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 4 \cdot 5}{25} = 3,44.$$

Выборка имеет две моды: 3 и 4 (встречаются одинаково часто — по 8 раз). $M_0 \in \{3; 4\}$.

Медиана: $M_в = 3$ (находится на середине на 13-м месте).

2.

Количество рыб в озере неизвестно. Поймали 100 рыб, пометили и отпустили. Через некоторое время при такой же погоде выловили 50 рыб, среди которых две оказались помеченными. Оценить количество рыб в озере.

Решение.

Пусть x — количество рыб в озере. В соответствии с классическим определением вероятности вероятность того, что случайно выловленная рыба помечена, равна $\frac{100}{x}$. В соответствии со статистическим определением эта вероятность приближённо равна $\frac{2}{50} = \frac{1}{25}$: $\frac{100}{x} \approx \frac{1}{25}$; $x \approx 2500$.

3.

При изучении колебаний температуры в июне в данной местности за 30 лет получены следующие результаты:

Среднемесячная температура, °C	15–17	17–19	19–21	21–23	23–25
Количество лет	2	5	10	7	6

Построить гистограмму частот.

Решение.

Если требуется оценить среднюю температуру за 30 лет, то интервальное распределение заменяют дискретным, выбирая вместо каждого интервала значения признака его середину.

Получаем:

x_i	16	18	20	22	24
n_i	2	5	10	7	6

$n = 30$.

$$\bar{x} = \frac{16 \cdot 2 + 18 \cdot 5 + 20 \cdot 10 + 22 \cdot 7 + 24 \cdot 6}{30} \approx 20{,}67.$$

При этом $M_0 = 20$; $M_в = 20$ (в середине ряда будут два равных значения 20: $M_в = \frac{20 + 20}{2} = 20$).